Générateurs parfaits

David Burguet

Congrès de la SMF, 8 Juin 2016, Tours

Soit $f : X \to X$ un système dynamique inversible,

Il y a une correspondance entre :

Partitions "génératrices" P de X

et

"Plongements" $\psi : X \to \{1, ..., K\}^{\mathbb{Z}}$ avec $\psi \circ f = \sigma \circ \psi$

Soit $f : X \to X$ un système dynamique inversible,

Il y a une correspondance entre :

Partitions "génératrices" P de X
et
"Plongements" $\psi : X \to \{1, ..., K\}^{\mathbb{Z}}$ avec $\psi \circ f = \sigma \circ \psi$

- à P on associe $\psi_P(x) = (P_{f^k x})_{k \in \mathbb{Z}}$ avec $P_x \in P$
- à $\psi : X \to \{1, ..., K\}^{\mathbb{Z}}$ on associe $P_\psi = (\psi^{-1}([i]))_{i=1,...,K}$.

$(X, \mathcal{A}, f, \mu)$ un système ergodique apériodique, Une partition mesurable P est génératrice lorsque $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} P^{[-n,n]} \overset{\mu}{=} \mathcal{A}$ avec $P^{[-n,n]} = \bigvee_{k=-n,\dots,n} f^k P$.

$(X, \mathcal{A}, f, \mu)$ un système ergodique apériodique, Une partition mesurable P est génératrice lorsque $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} P^{[-n,n]} \overset{\mu}{=} \mathcal{A}$ avec $P^{[-n,n]} = \bigvee_{k=-n,\dots,n} f^k P$.

Theorem (Krieger (70))

On a équivalence entre :

- $(X, \mathcal{A}, \mu, f)$ *admet une partition génératrice finie* P,
- $h(\mu) < +\infty$.

De plus on peut choisir P *avec* $\sharp P \leq e^{h(\mu)} + 1$.

X espace de Borel, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne, f application Borel apériodique, Une partition Borel P est génératrice lorsque $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} P^{[-n,n]} \overset{\mathcal{W}}{=} \mathcal{A}$.

X espace de Borel, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne, f application Borel apériodique, Une partition Borel P est génératrice lorsque $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} P^{[-n,n]} \overset{\mathcal{W}}{=} \mathcal{A}$.

Theorem (Hochman (15,16))

On a équivalence entre :

- (X, f) *admet une partition génératrice finie* P,
- $h(f) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,f)} h(\mu) < +\infty$.

De plus on peut choisir P *avec* $\sharp P \leq e^{h(f)} + 1$.

X espace compact métrisable, f homéomorphisme de X,

Definition

Une partition Borel P est appelé un générateur parfait lorsque le diamètre de $P^{[-n,n]}$ tend vers 0 avec n.

X espace compact métrisable, f homéomorphisme de X,

Definition

Une partition Borel P est appelé un générateur parfait lorsque le diamètre de $P^{[-n,n]}$ tend vers 0 avec n.

Proposition

Une partition Borel P est parfaite ssi il existe une extension symbolique π de (X, T) avec $\pi \circ \psi_P = Id_X$.

En particulier, d'après la correspondance évoquée précédemment, le système (X, T) admet une partition parfaite ssi il admet une extension symbolique $\pi : (Y, S) \to (X, T)$ avec une section Borel.

Capacité périodique :

$$\mathfrak{P}_{sup}(T) = \sup_n \frac{\log \sharp Per_n(T)}{n}.$$

Theorem (Krieger (82))

On a équivalence entre :

- (X, T) *admet en générateur parfait finie en ouverts-fermés* P,
- X *est zéro-dimensional et* (X, T) *est expansif.*

De plus on peut choisir P *avec* $\sharp P \leq e^{\max(h_{top}(T), \mathfrak{P}_{sup}(T))} + 1$.

Propriétés de petits bords

Definition

(X, T) a la propriété de petit bords lorsque X a une base de voisinages dont les bords sont de mesures nulles pour toute mesure T-invariante.

Propriétés de petits bords

Definition

(X, T) a la propriété de petit bords lorsque X a une base de voisinages dont les bords sont de mesures nulles pour toute mesure T-invariante.

Theorem (Lindenstrauss, Kulesza)

Si X est dimension finie et l'ensemble des points périodiques est zéro-dimensionel alors (X, T) a la propriété de petit bords.

Propriétés de petits bords

Definition

(X, T) a la propriété de petit bords lorsque X a une base de voisinages dont les bords sont de mesures nulles pour toute mesure T-invariante.

Theorem (Lindenstrauss, Kulesza)

Si X est dimension finie et l'ensemble des points périodiques est zéro-dimensionel alors (X, T) a la propriété de petit bords.

Il est conjecturé que la propriété de petit bords est vérifiée par tout système d'entropie finie avec un ensemble de points périodiques zéro-dimensionel.

Expansivité asymptotique

Nous supposons X zéro-dimensionel. Soit $(P_k)_k$ une suite décroissante de partitions dont le diamètre tends vers 0 et soit $(h_k)_k$ l'entropie mesurée relative à $(P_k)_k$.

$$h^*(T) := \lim_k \sup_\mu (h - h_k)(\mu),$$

$$\mathfrak{P}^*(T) = \lim_k \sup_n \max_{A^n \in P_k^{[0,n]}} \frac{\log Per_n(X, T) \cap A^n}{n}.$$

Definition

(X, T) est dit assymptotiquement h-expansif lorsque

$$h^*(T) = \mathfrak{P}^*(T) = 0.$$

Theorem (B. 15)

On a équivalence entre :

- (X, T) *admet un générateur parfait fini* P *avec des bords nuls,*
- X *a la propriété de petit bords et* (X, T) *est asyptotiquement expansif.*

De plus on peut choisir P *avec* $\sharp P \leq e^{\max(h_{top}(T), \mathfrak{P}_{sup}(T))} + 1$.

Extension symbolique

Theorem (Boyle-Downarowicz)

(X, T) admet une extension symbolique ssi il existe $E \geq h$ avec $E - h_k$ semicontinue supérieurement pour tout k.

Extension symbolique

Theorem (Boyle-Downarowicz)

(X, T) admet une extension symbolique ssi il existe $E \geq h$ avec $E - h_k$ semicontinue supérieurement pour tout k.

$$h_{sex}(T) = \inf\{h_{top}(S),\ (Y, S) \text{ ext. sym. de } (X, T)\}.$$

Extension symbolique

Theorem (Boyle-Downarowicz)

(X, T) admet une extension symbolique ssi il existe $E \geq h$ avec $E - h_k$ semicontinue supérieurement pour tout k.

$$h_{sex}(T) = \inf\{h_{top}(S),\ (Y, S) \text{ ext. sym. de } (X, T)\}.$$

Theorem (B.-Downarowicz (16))

Soit (X, T) un système avec la propriété de petit bords. On a équivalence entre :

- *(X, T) admet un générateur parfait P,*
- *(X, T) admet une extension sybmolique et $\mathfrak{P}_{sup}(T) < +\infty$.*

De plus on peut choisir P avec $\sharp P \leq e^{\max(h_{sex}(T)+\mathfrak{P}^*(T), \mathfrak{P}_{sup}(T))} + 1$.

- Estimées combinatoires via l'entropie ,
- Système de marqueurs.

Pour les systèmes apériodiques les estimées entropiques pour les plongements sont les mêmes que celles utilisées pour construire les extensions symboliques. On utilise les systèmes de marqueurs suivants :

Pour les systèmes apériodiques les estimées entropiques pour les plongements sont les mêmes que celles utilisées pour construire les extensions symboliques. On utilise les systèmes de marqueurs suivants :

Lemma (Krieger)

Soit (X, T) un système dynamique zéro-dimensionel. Alors pour tout n il existe un ouvert-fermé U_n tel que :

- $X = \bigcup_{k=-n,\dots,n} T^k U_n$,
- $(T^k U_n)_{k=0,\dots,n-1}$ *sont deux à deux disjoints.*

Pour les systèmes apériodiques les estimées entropiques pour les plongements sont les mêmes que celles utilisées pour construire les extensions symboliques. On utilise les systèmes de marqueurs suivants :

Lemma (Krieger)

Soit (X, T) un système dynamique zéro-dimensionel. Alors pour tout n il existe un ouvert-fermé U_n tel que :

- $X = \bigcup_{k=-n,\dots,n} T^k U_n$,
- $(T^k U_n)_{k=0,\dots,n-1}$ *sont deux à deux disjoints.*

Lemma

Pour toute suite $(n_l)_l$ croissant suffisamment vite il existe un ouvert-fermé U_l tel que :

- $X = \bigcup_{k=-2n_l,\dots,2n_l} T^k U_n$,
- $(T^k U_n)_{k=0,\dots,\frac{n_l}{2}-1}$ *sont deux à deux disjoints.*

Un lemmé clé pour construire le système de marqueurs dans le cas périodique est le suivant :

Lemma

Soit (X, T) un système zéro-dimensionel. Il existe une extension zéro-dimensionel apériodique (Y, S) de (X, T) qui préserve l'entropie et qui est isomorphique au dessus des mesures apériodiques.