Entropie dimensionnée des automates cellulaires

David Burguet

Orsay, 1er Février, 2021

Automates cellulaires linéaires

$X = \mathbb{F}_p^{\mathbb{Z}^d}$, $\sigma : X \circlearrowleft$ le $\mathbb{Z}^d$-décalage sur X,
I sous-ensemble fini non-vide de $\mathbb{Z}^d$,
$(a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{F}_p^*)^I$,

$$\forall x = (x_k)_k \in X,\ \forall k \in \mathbb{Z}^d,\ \ (f(x))_k = \left(\sum_{i \in I} a_i x_{k+i} \right)_k$$

f automate cellulaire linéaire, I domaine de f, $I' = I \cup \{0\}$.

Automates cellulaires linéaires

$X = \mathbb{F}_p^{\mathbb{Z}^d}$, $\sigma : X \circlearrowleft$ le $\mathbb{Z}^d$-décalage sur X,
I sous-ensemble fini non-vide de $\mathbb{Z}^d$,
$(a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{F}_p^*)^I$,

$$\forall x = (x_k)_k \in X,\ \forall k \in \mathbb{Z}^d,\ \ (f(x))_k = \left(\sum_{i \in I} a_i x_{k+i} \right)_k$$

f automate cellulaire linéaire, I domaine de f, $I' = I \cup \{0\}$.

<u>Propriétés connues :</u>

- pour $d = 1$ on a $h_{top}(f) = \mathrm{diam}(I') \cdot \log p$,

Automates cellulaires linéaires

$X = \mathbb{F}_p^{\mathbb{Z}^d}$, $\sigma : X \circlearrowleft$ le $\mathbb{Z}^d$-décalage sur X,
I sous-ensemble fini non-vide de $\mathbb{Z}^d$,
$(a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{F}_p^*)^I$,

$$\forall x = (x_k)_k \in X,\ \forall k \in \mathbb{Z}^d,\ \ (f(x))_k = \left(\sum_{i \in I} a_i x_{k+i} \right)_k$$

f automate cellulaire linéaire, I domaine de f, $I' = I \cup \{0\}$.

<u>Propriétés connues :</u>

- pour $d = 1$ on a $h_{top}(f) = \mathrm{diam}(I') \cdot \log p$,
- pour $d > 1$ on a $h_{top}(f) = +\infty$ pour $I \neq \{0\}$ et $h_{top}(f) = 0$ si $I = \{0\}$ (Morris-Ward),

Automates cellulaires linéaires

$X = \mathbb{F}_p^{\mathbb{Z}^d}$, $\sigma : X \circlearrowleft$ le $\mathbb{Z}^d$-décalage sur X,
I sous-ensemble fini non-vide de $\mathbb{Z}^d$,
$(a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{F}_p^*)^I$,

$$\forall x = (x_k)_k \in X,\ \forall k \in \mathbb{Z}^d,\ \ (f(x))_k = \left(\sum_{i \in I} a_i x_{k+i} \right)_k$$

f automate cellulaire linéaire, I domaine de f, $I' = I \cup \{0\}$.

<u>Propriétés connues :</u>

- pour $d = 1$ on a $h_{top}(f) = \mathrm{diam}(I') \cdot \log p$,
- pour $d > 1$ on a $h_{top}(f) = +\infty$ pour $I \neq \{0\}$ et $h_{top}(f) = 0$ si $I = \{0\}$ (Morris-Ward),
- l'entropie de l'action de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ par f et σ est nulle,

Automates cellulaires linéaires

$X = \mathbb{F}_p^{\mathbb{Z}^d}$, $\sigma : X \circlearrowleft$ le $\mathbb{Z}^d$-décalage sur X,
I sous-ensemble fini non-vide de $\mathbb{Z}^d$,
$(a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{F}_p^*)^I$,

$$\forall x = (x_k)_k \in X,\ \forall k \in \mathbb{Z}^d,\ \ (f(x))_k = \left(\sum_{i \in I} a_i x_{k+i} \right)_k$$

f automate cellulaire linéaire, I domaine de f, $I' = I \cup \{0\}$.

<u>Propriétés connues :</u>

- pour $d = 1$ on a $h_{top}(f) = \mathrm{diam}(I') \cdot \log p$,
- pour $d > 1$ on a $h_{top}(f) = +\infty$ pour $I \neq \{0\}$ et $h_{top}(f) = 0$ si $I = \{0\}$ (Morris-Ward),
- l'entropie de l'action de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ par f et σ est nulle,
- la dimension moyenne topologique de f est nulle.

$I \neq \{0\}$,
$J \subset \mathbb{R}^d$, $\sharp J = |J \cap \mathbb{Z}^d|$,
P_J la partition de X en coordonnées J

$$P_J(x) = \{y = (y_k)_k \in X,\ y_m = x_m \text{ pour } m \in J \cap \mathbb{Z}^d\}.$$

$I \neq \{0\}$,
$J \subset \mathbb{R}^d$, $\sharp J = |J \cap \mathbb{Z}^d|$,
P_J la partition de X en coordonnées J

$$P_J(x) = \{y = (y_k)_k \in X,\ y_m = x_m \text{ pour } m \in J \cap \mathbb{Z}^d\}.$$

Entropie top. de f rel. à P_J :

$$h_{top}(f, P_J) := \lim_n \frac{1}{n} \log \left| \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} P_J \right| \leq \sharp J \cdot \log p$$

$$\text{"}\, h_{top}(f, P_J) \xrightarrow{J \to \mathbb{R}^d} h_{top}(f) = +\infty.\text{"}$$

$I \neq \{0\}$,
$J \subset \mathbb{R}^d$, $\sharp J = |J \cap \mathbb{Z}^d|$,
P_J la partition de X en coordonnées J

$$P_J(x) = \{y = (y_k)_k \in X,\ y_m = x_m \text{ pour } m \in J \cap \mathbb{Z}^d\}.$$

Entropie top. de f rel. à P_J :

$$h_{top}(f, P_J) := \lim_n \frac{1}{n} \log \left| \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} P_J \right| \leq \sharp J \cdot \log p$$

$$\text{"}\, h_{top}(f, P_J) \xrightarrow{J \to \mathbb{R}^d} h_{top}(f) = +\infty.\text{"}$$

Pour des J "réguliers", $h_{top}(f, P_J)$ croît comme le périmètre de J.

$I \neq \{0\}$,
$J \subset \mathbb{R}^d$, $\sharp J = |J \cap \mathbb{Z}^d|$,
P_J la partition de X en coordonnées J

$$P_J(x) = \{y = (y_k)_k \in X,\ y_m = x_m \text{ pour } m \in J \cap \mathbb{Z}^d\}.$$

Entropie top. de f rel. à P_J :

$$h_{top}(f, P_J) := \lim_n \frac{1}{n} \log \left| \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} P_J \right| \leq \sharp J \cdot \log p$$

$$\text{"}\, h_{top}(f, P_J) \xrightarrow{J \to \mathbb{R}^d} h_{top}(f) = +\infty.\text{"}$$

Pour des J "réguliers", $h_{top}(f, P_J)$ croît comme le périmètre de J.

Blanchard-Tisseur, Lakshtanov-Langvagen.

Exhaustion convexe

$J \subset \mathbb{R}^d$ domaine borné à bord Lipshitz,
$p(J)$ périmètre de J, $cv(J)$ l'enveloppe convexe de J,

$$P_{cv(J)} > P_J$$
$$p(cv(J)) \leq p(J)$$

$$\frac{h_{top}(f, P_J)}{p(J)} \leq \frac{h_{top}(f, P_{cv(J)})}{p(cv(J)}$$

Exhaustion convexe

$J \subset \mathbb{R}^d$ domaine borné à bord Lipshitz,
$p(J)$ périmètre de J, $cv(J)$ l'enveloppe convexe de J,

$$P_{cv(J)} > P_J$$
$$p(cv(J)) \leq p(J)$$

$$\frac{h_{top}(f, P_J)}{p(J)} \leq \frac{h_{top}(f, P_{cv(J)})}{p(cv(J)}$$

$\mathcal{D} = \{J \subset \mathbb{R}^d,\ \text{compact convexe avec } 0 \in \overset{o}{J}\}$ avec top. Hausdorf,
$\mathcal{D}^1 = \{J \in \mathcal{D},\ p(J) = 1\}$ fermé (pas compact pour $d > 1$),
$J \in \mathcal{D} \mapsto \widetilde{J} = p(J)^{-\frac{1}{d-1}} J \in \mathcal{D}^1$.

Exhaustion convexe

$J \subset \mathbb{R}^d$ domaine borné à bord Lipshitz,
$p(J)$ périmètre de J, $cv(J)$ l'enveloppe convexe de J,

$$P_{cv(J)} > P_J$$
$$p(cv(J)) \leq p(J)$$

$$\frac{h_{top}(f, P_J)}{p(J)} \leq \frac{h_{top}(f, P_{cv(J)})}{p(cv(J)}$$

$\mathcal{D} = \{J \subset \mathbb{R}^d,\ \text{compact convexe avec } 0 \in \overset{o}{J}\}$ avec top. Hausdorf,
$\mathcal{D}^1 = \{J \in \mathcal{D},\ p(J) = 1\}$ fermé (pas compact pour $d > 1$),
$J \in \mathcal{D} \mapsto \widetilde{J} = p(J)^{-\frac{1}{d-1}} J \in \mathcal{D}^1$.

Definition

Une exhaustion convexe est une suite $\mathcal{J} = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}$ telle que $(\widetilde{J_n})_n \to \widetilde{J_\infty} \in \mathcal{D}^1$.

Exemple : $\mathcal{J}_O = (nO)_n$ avec $O \in \mathcal{D}$.

Entropie dimensionnée topologique

Entropie top. dimensionnée de f rel. à $\mathcal{J} = (J_n)_n$:

$$h^d_{top}(f, \mathcal{J}) = \limsup_n \frac{h_{top}(f, P_{J_n})}{p(J_n)}.$$

Entropie top. dimensionnée de f :

$$h^d_{top}(f) = \sup_{\mathcal{J}} h^d_{top}(f, \mathcal{J}).$$

$d = 1$, $p(J) = 2$ pour J segment de $\mathbb{R}$, donc $h^1_{top}(f) = \frac{h_{top}(f)}{2}$.

Entropie dimensionnée topologique

Entropie top. dimensionnée de f rel. à $\mathcal{J} = (J_n)_n$:

$$h^d_{top}(f, \mathcal{J}) = \limsup_n \frac{h_{top}(f, P_{J_n})}{p(J_n)}.$$

Entropie top. dimensionnée de f :

$$h^d_{top}(f) = \sup_{\mathcal{J}} h^d_{top}(f, \mathcal{J}).$$

$d = 1$, $p(J) = 2$ pour J segment de $\mathbb{R}$, donc $h^1_{top}(f) = \frac{h_{top}(f)}{2}$.

Théorème

f automate cellulaire linéaire sur $\mathbb{F}_p^{\mathbb{Z}^d}$, I domaine de f,
$I' = I \cup \{0\}$, $R_{I'}$ le rayon de la plus petite boule contenant I',

$$h^d_{top}(f) = R_{I'} \cdot \log p.$$

Lien avec la dimension moyenne métrique

(X, d) espace métrique compact, $f : X \circlearrowleft$ continue,

$$\mathrm{mdim}(f, \mathrm{d}) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{h_{top}(f, \epsilon, \mathrm{d})}{|\log \epsilon|}.$$

Lien avec la dimension moyenne métrique

(X, d) espace métrique compact, $f : X \circlearrowleft$ continue,

$$\mathrm{mdim}(f, \mathrm{d}) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{h_{top}(f, \epsilon, \mathrm{d})}{|\log \epsilon|}.$$

$\mathcal{J}$ exhaustion convexe, $\alpha > 1$,

$$\forall x, y \in \mathbb{F}_p^{\mathbb{Z}^d} \ \mathrm{d}_{\mathcal{J}}(x, y) = \alpha^{-\max\{n,\ y \in P_{J_n}(x)\}}.$$

Lien avec la dimension moyenne métrique

(X, d) espace métrique compact, $f : X \circlearrowleft$ continue,

$$\mathrm{mdim}(f, \mathrm{d}) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{h_{top}(f, \epsilon, \mathrm{d})}{|\log \epsilon|}.$$

$\mathcal{J}$ exhaustion convexe, $\alpha > 1$,

$$\forall x, y \in \mathbb{F}_p^{\mathbb{Z}^d} \ \mathrm{d}_{\mathcal{J}}(x, y) = \alpha^{-\max\{n,\ y \in P_{J_n}(x)\}}.$$

Alors pour $O \in \mathcal{D}$, on a

$$h_{top}^d(f, \mathcal{J}_O) = \frac{(\log \alpha)^{d-1}}{p(O)} \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{h_{top}(f, \epsilon, \mathrm{d}_{\mathcal{J}_O})}{|\log \epsilon|^{d-1}}.$$

Pour $d = 2$ on retrouve $\mathrm{mdim}(f, \mathrm{d}_{\mathcal{J}_O})$ à une constante près et pour $d \geq 3$ on obtient $\mathrm{mdim}(f, \mathrm{d}_{\mathcal{J}_O}) = +\infty$ si $h_{top}^d(f, \mathcal{J}_O) > 0$.

Lien avec la dimension moyenne métrique

(X, d) espace métrique compact, $f : X \circlearrowleft$ continue,

$$\mathrm{mdim}(f, \mathrm{d}) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{h_{top}(f, \epsilon, \mathrm{d})}{|\log \epsilon|}.$$

$\mathcal{J}$ exhaustion convexe, $\alpha > 1$,

$$\forall x, y \in \mathbb{F}_p^{\mathbb{Z}^d} \ \mathrm{d}_{\mathcal{J}}(x, y) = \alpha^{-\max\{n,\ y \in P_{J_n}(x)\}}.$$

Alors pour $O \in \mathcal{D}$, on a

$$h_{top}^d(f, \mathcal{J}_O) = \frac{(\log \alpha)^{d-1}}{p(O)} \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{h_{top}(f, \epsilon, \mathrm{d}_{\mathcal{J}_O})}{|\log \epsilon|^{d-1}}.$$

Pour $d = 2$ on retrouve $\mathrm{mdim}(f, \mathrm{d}_{\mathcal{J}_O})$ à une constante près et pour $d \geq 3$ on obtient $\mathrm{mdim}(f, \mathrm{d}_{\mathcal{J}_O}) = +\infty$ si $h_{top}^d(f, \mathcal{J}_O) > 0$.

Shinoda-Tsukamoto, dimension moyenne du décalage horizontal, $I = \{(1, 0)\}$ et $a_{1,0} = 1$, pour $\mathrm{d}(x, y) = 2^{-\min\{\|k\|_\infty,\ x_k \neq y_k\}}$.

Erosion et bord morphologique

$I, J \subset \mathbb{R}^d$,
$J \ominus I = \{j,\ j + i \in J\ \forall i \in I\}$,
$\partial_I J = J \setminus (J \ominus I)$.

Erosion et bord morphologique

$I, J \subset \mathbb{R}^d$,
$J \ominus I = \{j,\ j + i \in J\ \forall i \in I\}$,
$\partial_I J = J \setminus (J \ominus I)$.

Lemme

$$h_{top}(f, P_J) = h_{top}(f, P_{\partial_I J}).$$

Erosion et bord morphologique

$I, J \subset \mathbb{R}^d$,
$J \ominus I = \{j,\ j + i \in J\ \forall i \in I\}$,
$\partial_I J = J \setminus (J \ominus I)$.

Lemme

$$h_{top}(f, P_J) = h_{top}(f, P_{\partial_I J}).$$

<u>Preuve :</u>

$$P_J > f^{-1} P_{J \ominus I}$$

$$f^{-1} P_J \vee P_J = f^{-1} P_{\partial_I J} \vee P_J$$

$$\forall k,\ P_J \vee \bigvee_{m=0}^{k-1} f^{-m} P_{\partial_I J} = \bigvee_{m=0}^{k-1} f^{-m} P_J$$

$\square$

Puisque $h_{top}(f, P_{\partial_I J}) \leq \sharp \partial_I J \cdot \log p$, on obtient :

Corollaire

$\mathcal{J} = (J_n)_n$ exhaustion convexe,

$$h^d_{top}(f, \mathcal{J}) \leq \limsup_n \frac{\sharp \partial_I J_n}{p(J_n)} \cdot \log p.$$

Puisque $h_{top}(f, P_{\partial_l J}) \leq \sharp \partial_l J \cdot \log p$, on obtient :

Corollaire

$\mathcal{J} = (J_n)_n$ exhaustion convexe,

$$h^d_{top}(f, \mathcal{J}) \leq \limsup_n \frac{\sharp \partial_l J_n}{p(J_n)} \cdot \log p.$$

Pour montrer $h^d_{top}(f) \leq R_{l'} \cdot \log p$ on est ramené à montrer $\limsup_n \frac{\sharp \partial_l J_n}{p(J_n)} \leq R_{l'}$ pour toute exhaustion convexe $(J_n)_n$.

Analyse convexe...

Première intégrale quermass

$I \subset \mathbb{R}^d$ convexe compact, h_I sa **fonction de support**,

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1},\ h_I(x) = \max_{i \in I} i \cdot x$$

Première intégrale quermass

$I \subset \mathbb{R}^d$ convexe compact, h_I sa **fonction de support**,

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1},\ h_I(x) = \max_{i \in I} i \cdot x$$

$O \in \mathcal{D}$, σ_O sa **mesure de surface**,

$$\forall B \subset \mathbb{S}^{d-1},\ \sigma_O(B) = \mathcal{H}_{d-1}\left(N_{\partial O}^{-1} B\right)$$

Première intégrale quermass

$I \subset \mathbb{R}^d$ convexe compact, h_I sa **fonction de support**,

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1},\ h_I(x) = \max_{i \in I} i \cdot x$$

$O \in \mathcal{D}$, σ_O sa **mesure de surface**,

$$\forall B \subset \mathbb{S}^{d-1},\ \sigma_O(B) = \mathcal{H}_{d-1}\left(N_{\partial O}^{-1} B\right)$$

Première I-**relative Intégrale quermass** de $O \in \mathcal{D}$,

$$V_I(O) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_I \, d\sigma_O$$

Première intégrale quermass

$I \subset \mathbb{R}^d$ convexe compact, h_I sa **fonction de support**,

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1},\ h_I(x) = \max_{i \in I} i \cdot x$$

$O \in \mathcal{D}$, σ_O sa **mesure de surface**,

$$\forall B \subset \mathbb{S}^{d-1},\ \sigma_O(B) = \mathcal{H}_{d-1}\left(N_{\partial O}^{-1} B\right)$$

Première I-**relative Intégrale quermass** de $O \in \mathcal{D}$,

$$V_I(O) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_I \, d\sigma_O$$

Lemme

$V_I(O) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\mathrm{Leb}(O) - \mathrm{Leb}(O \ominus \rho I)}{\rho}$.

Première intégrale quermass

$I \subset \mathbb{R}^d$ convexe compact, h_I sa **fonction de support**,

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1},\ h_I(x) = \max_{i \in I} i \cdot x$$

$O \in \mathcal{D}$, σ_O sa **mesure de surface**,

$$\forall B \subset \mathbb{S}^{d-1},\ \sigma_O(B) = \mathcal{H}_{d-1}\left(N_{\partial O}^{-1} B\right)$$

Première I-**relative Intégrale quermass** de $O \in \mathcal{D}$,

$$V_I(O) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_I \, d\sigma_O$$

Lemme

$V_I(O) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\mathrm{Leb}(O) - \mathrm{Leb}(O \ominus \rho I)}{\rho}$ $\left(= \lim_{\rho \to 0} \frac{\mathrm{Leb}(\partial_{\rho I} O)}{\rho} \ \textit{si}\ 0 \in I\right)$.

Comptage des entiers

Comptage des points entiers dans des gros convexes.

Lemme

Pour $J \in \mathcal{D}$, on a

$$|\sharp J - \mathrm{Leb}(J)| = O(p(J)).$$

Comptage des entiers

Comptage des points entiers dans des gros convexes.

Lemme

Pour $J \in \mathcal{D}$, on a

$$|\sharp J - \mathrm{Leb}(J)| = O(p(J)).$$

Comptages des points entiers dans le bord morphologique des gros convexes.

Lemme

$d = 2$, I convexe compact avec $0 \in I$, $\mathcal{J}$ exhaustion convexe,

$$\limsup_n \frac{\sharp \partial_I J_n}{p(J_n)} = V_I(\widetilde{J_\infty}).$$

Sphère englobante

$I \subset \mathbb{R}^d$ borné,
S_I la sphère de plus petit rayon contenant I,
R_I son rayon, x_I son centre.

Sphère englobante

$I \subset \mathbb{R}^d$ borné,
S_I la sphère de plus petit rayon contenant I,
R_I son rayon, x_I son centre.

<u>Alternative :</u>

i) Il existe $J \subset I \cap S_I$ fini tel que x_I appartient à l'intérieur de $cv(J)$. Un tel polytope inscriptible $cv(J)$ est dit I-générateur,

ii) Sinon I est inclus dans un demi-espace contenant x_I dans son bord.

Sphère englobante

$I \subset \mathbb{R}^d$ borné,
S_I la sphère de plus petit rayon contenant I,
R_I son rayon, x_I son centre.

Alternative :

i) Il existe $J \subset I \cap S_I$ fini tel que x_I appartient à l'intérieur de $cv(J)$. Un tel polytope inscriptible $cv(J)$ est dit I-générateur,

ii) Sinon I est inclus dans un demi-espace contenant x_I dans son bord.

Lemme

$$\sup_{O \in \mathcal{D}^1} V_I(O) = R_I.$$

Le supremum n'est pas atteint dans le cas ii) et est atteint dans le cas i) pour le dual d'un polytope I-générateur.

Preuve de la formule d'entropie dimensionnée d'un CA linéaire

En combinant inégalités précedentes, on obtient

$$h^d_{top}(f) \leq R_{l'} \cdot \log p.$$

Preuve de la formule d'entropie dimensionnée d'un CA linéaire

En combinant inégalités précedentes, on obtient

$$h^d_{top}(f) \leq R_{I'} \cdot \log p.$$

<u>Preuve de l'inégalité inverse dans le cas i) :</u>

T polytope I-générateur,
T' dual de T,

$$h^d_{top}(f, \mathcal{J}_{T'}) \geq \sharp \limsup_n \frac{\sharp \partial_I nT'}{p(nT')} \cdot \log p \ (= R_{I'} \cdot \log p)$$

$$h_{top}(f, P_{nT'}) \geq \sharp \partial_I nT' \cdot \log p$$

Permutativité

f CA sur $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ de règle locale $F : \mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$,

$$\forall x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in X,\ f(x)_k = F\left((x_{i+k})_{i \in I}\right)$$

Permutativité

f CA sur $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ de règle locale $F : \mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$,

$$\forall x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in X,\ f(x)_k = F\left((x_{i+k})_{i \in I}\right)$$

f est permutatif si pour tout point extrémal $k \neq 0$ de $cv(I')$,

$$\forall a \forall (x_i)_{i \in I \setminus \{k\}}\ \exists x_k,\quad F\left((x_i)_{i \in I}\right) = a.$$

Permutativité

f CA sur $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ de règle locale $F : \mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$,

$$\forall x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in X,\ f(x)_k = F\left((x_{i+k})_{i \in I}\right)$$

f est permutatif si pour tout point extrémal $k \neq 0$ de $cv(I')$,

$$\forall a \forall (x_i)_{i \in I \setminus \{k\}}\ \exists x_k,\quad F\left((x_i)_{i \in I}\right) = a.$$

Lemme

Si f permutatif, alors f^k est aussi permutatif pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $cv(I'_k) = k \cdot cv(I')$ avec I_k le domaine de f^k.

Lemme

$$\forall A \in \bigvee_{m=0}^{k-1} f^{-m} P_{nT'} \quad \forall (x_i)_i \in \mathcal{A}^{\partial_l nT' \cap \mathbb{Z}^d}$$

$$\exists w \in A, \ \forall i \ f^k(w)_i = x_i$$

Lemme

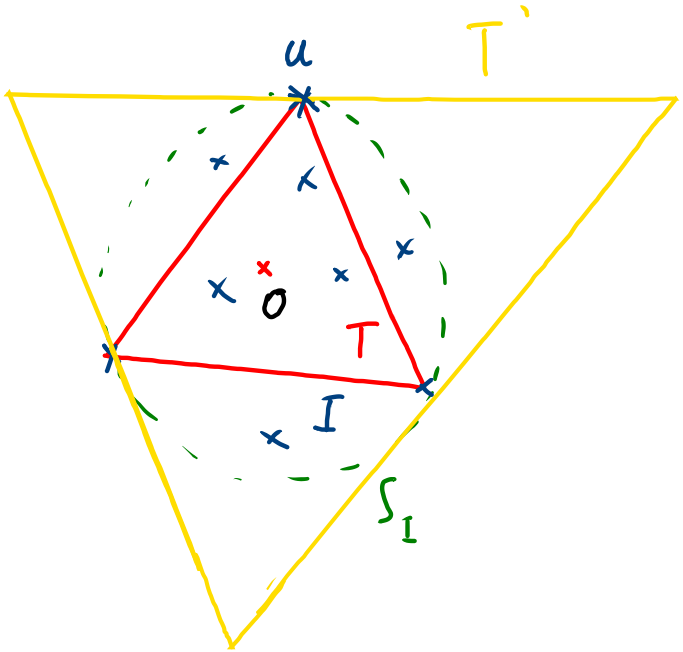
$$\forall A \in \bigvee_{m=0}^{k-1} f^{-m} P_{nT'} \quad \forall (x_i)_i \in \mathcal{A}^{\partial_I nT' \cap \mathbb{Z}^d}$$

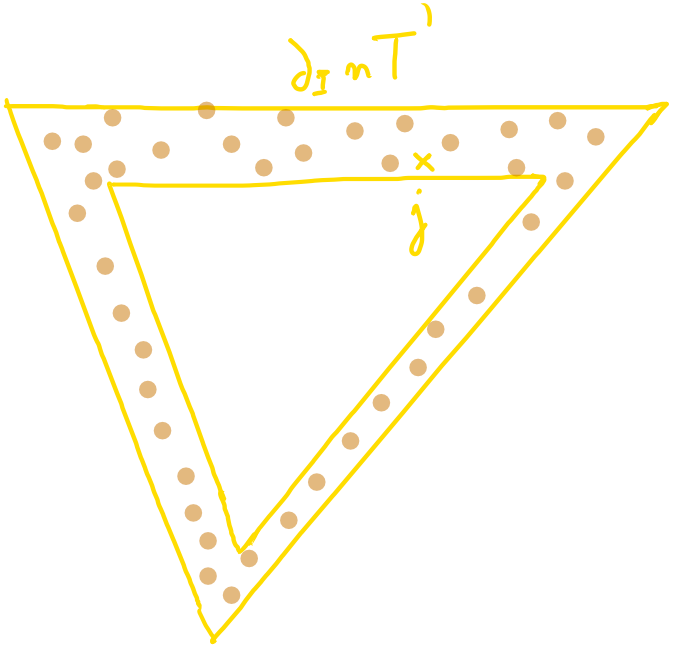
$$\exists w \in A, \ \forall i \ f^k(w)_i = x_i$$

$$\Rightarrow |\{B \in \bigvee_{m=0}^{k} f^{-m} P_{nT'}, \ A \supset B\}| \geq |\mathcal{A}|^{\sharp \partial_I nT'}$$

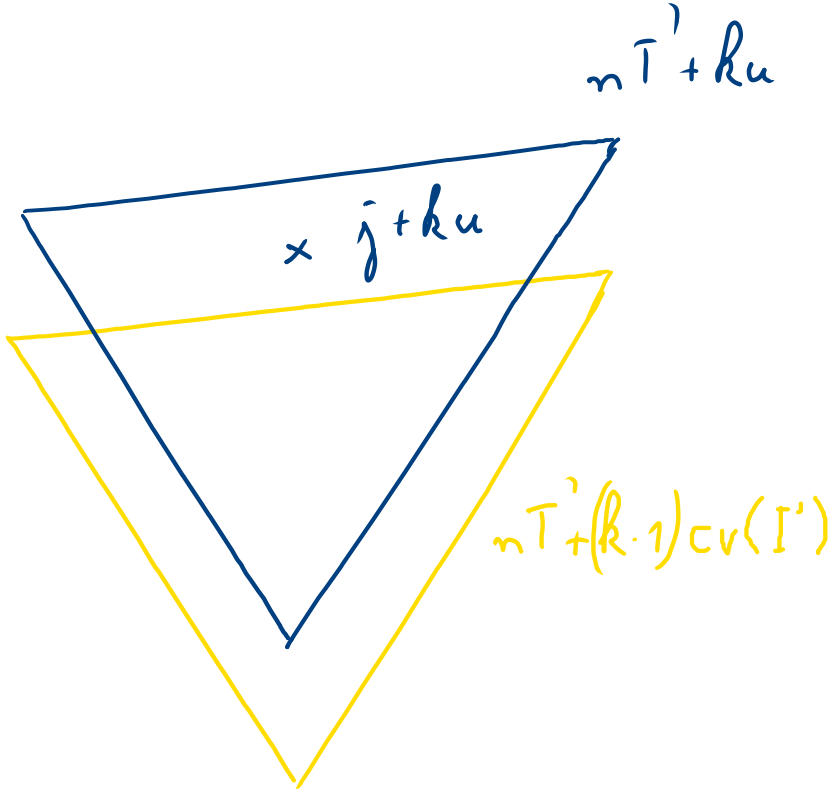
$$h_{top}(f, P_{nT'}) \geq \sharp \partial_I nT' \cdot \log |\mathcal{A}|$$

Idées de preuve du Lemme





Soient $j \in \partial_I nT'$ et u sommet de T comme sur les croquis précédents. Si $w \in A$ et $a \in \mathcal{A}$, par permutativité de f^k, on peut changer w_{j+ku} de sorte que le nouveau w vérifie $(f^k(w))_j = a$. De plus w appartient toujours à A car $(f^m(w))_q$, $m < k$ et $q \in J \cap \mathbb{Z}^d$, ne dépend que de w_p pour $p \in nT' + (k-1)cv(I')$.



On peut ensuite raisonner par récurrence sur $j \in \partial_I J \cap \mathbb{Z}^d$ pour un bon ordre.

<u>Point clé :</u> $\exists! u \in I$, $h_I(N^F) := \max_{i \in I} i \cdot N^F = u \cdot N^F$ pour toute face F de T' avec N^F la normale à F.

Généralisation à des endomorphismes de $\mathbb{Z}^d$-actions

X compact métrique, τ une action de $\mathbb{Z}^d$ sur X,
$f : X \circlearrowleft$ satisfaisant $f \circ \tau = \tau \circ f$
$\mathcal{U}$ un recouvrement fini d'ouverts de X, $\mathcal{J}$ exhaustion convexe,

$$h_{top}^{\tau}(f, \mathcal{U}, \mathcal{J}) = \limsup_{n} \frac{h_{top}(f, \bigvee_{k \in J_n} \tau^{-k}\mathcal{U})}{p(J_n)}$$

$$h_{top}^{\tau}(f) = \sup_{\mathcal{U}, \mathcal{J}} h_{top}(f, \mathcal{U}, \mathcal{J})$$

Généralisation à des endomorphismes de $\mathbb{Z}^d$-actions

X compact métrique, τ une action de $\mathbb{Z}^d$ sur X,
$f : X \circlearrowleft$ satisfaisant $f \circ \tau = \tau \circ f$
$\mathcal{U}$ un recouvrement fini d'ouverts de X, $\mathcal{J}$ exhaustion convexe,

$$h^{\tau}_{top}(f, \mathcal{U}, \mathcal{J}) = \limsup_{n} \frac{h_{top}(f, \bigvee_{k \in J_n} \tau^{-k}\mathcal{U})}{p(J_n)}$$

$$h^{\tau}_{top}(f) = \sup_{\mathcal{U}, \mathcal{J}} h_{top}(f, \mathcal{U}, \mathcal{J})$$

Corollaire

Soient τ le $\mathbb{Z}^d$-décalage sur $X = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d}$ et $f : X \circlearrowleft$ un automate cellulaire linéaire avec un domaine non réduit à $\{0\}$. Alors

$$h^{\tau}_{top}(f) = +\infty$$

Questions :

- Exemple d'automate cellulaire où $h^d_{top}(f) = \sup_{O \in \mathcal{D}^1} h^d_{top}(f, O)$ est atteint pour un $O \in \mathcal{D}^1$, qui n'est pas un polytope ?

Questions :

- Exemple d'automate cellulaire où $h^d_{top}(f) = \sup_{O \in \mathcal{D}^1} h^d_{top}(f, O)$ est atteint pour un $O \in \mathcal{D}^1$, qui n'est pas un polytope ?
- Calculer l'entropie dimensionnée pour des endomorphismes pour des actions algébriques de $\mathbb{Z}^d$.

Exposant de Lyapunov

$x \in X$, $\mathcal{J} = (J_n)_n$,

$$\mathcal{D}(x, \mathcal{J}) = \{\mathcal{K} = (K_n)_n,\ \widetilde{K_\infty} = \widetilde{J_\infty} \text{ et } fP_{J_n}(x) \subset P_{K_n}(fx)\, \forall n\}$$

Exposant de Lyapunov

$x \in X$, $\mathcal{J} = (J_n)_n$,

$$\mathcal{D}(x, \mathcal{J}) = \{\mathcal{K} = (K_n)_n,\ \widetilde{K_\infty} = \widetilde{J_\infty} \text{ et } fP_{J_n}(x) \subset P_{K_n}(fx)\, \forall n\}$$

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{J}}(x)\, f = \inf_{\mathcal{K} \in \mathcal{D}(x,\mathcal{J})} \limsup_n \sharp(J_n \setminus K_n)$$

$$\mathrm{gr}\ f(x) = \sup_{\mathcal{J}} \mathrm{gr}_{\mathcal{J}}\ f(x)$$

Exposant de Lyapunov

$x \in X$, $\mathcal{J} = (J_n)_n$,

$$\mathcal{D}(x, \mathcal{J}) = \{\mathcal{K} = (K_n)_n,\ \widetilde{K_\infty} = \widetilde{J_\infty} \text{ et } fP_{J_n}(x) \subset P_{K_n}(fx)\, \forall n\}$$

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{J}}(x)\, f = \inf_{\mathcal{K} \in \mathcal{D}(x,\mathcal{J})} \limsup_n \sharp(J_n \setminus K_n)$$

$$\mathrm{gr}\ f(x) = \sup_{\mathcal{J}} \mathrm{gr}_{\mathcal{J}}\ f(x)$$

Lemme

$x \mapsto \mathrm{gr}\ f(x)$ est un coycle (borné) sous-additif.

Pour $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$, d'après le thm ergodique sous-additif, on a

$$\mu \text{ p.t. } x,\ \chi(x) := \lim_n \frac{1}{n} \mathrm{gr}\ f^n(x)$$

$$\chi(\mu) := \int \chi(x)\, d\mu(x) = \lim_n \frac{1}{n} \int \mathrm{gr}\ f^n(x)\, d\mu.$$

Entropie dimensionnée mesurée

$$\forall \mathcal{J}, \mu, \;\; h_\mu^d(f, \mathcal{J}) = \limsup_n \frac{h_\mu(f, P_{J_n})}{p(J_n)},$$

$$h_\mu^d(f) = \sup_{\mathcal{J}} h_\mu^d(f, \mathcal{J}).$$

Entropie dimensionnée mesurée

$$\forall \mathcal{J}, \mu,\ h_\mu^d(f, \mathcal{J}) = \limsup_n \frac{h_\mu(f, P_{J_n})}{p(J_n)},$$

$$h_\mu^d(f) = \sup_{\mathcal{J}} h_\mu^d(f, \mathcal{J}).$$

Théorème (Inégalité de Ruelle)

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(X, f),\ h_\mu^d(f) \leq \int \chi \, d\mu \cdot \log p.$$

$d = 1$, Shereshevsky, Tisseur.

Entropie dimensionnée mesurée

$$\forall \mathcal{J}, \mu,\ h_\mu^d(f, \mathcal{J}) = \limsup_n \frac{h_\mu(f, P_{J_n})}{p(J_n)},$$

$$h_\mu^d(f) = \sup_{\mathcal{J}} h_\mu^d(f, \mathcal{J}).$$

Théorème (Inégalité de Ruelle)

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(X, f),\ h_\mu^d(f) \leq \int \chi \, d\mu \cdot \log p.$$

$d = 1$, Shereshevsky, Tisseur.

Question

- *Pour l'automate linéaire, la mesure uniforme μ est invariante. Pour $d = 1$, cette mesure est d'entropie maximale et vérifie $h(\mu) = \int \chi \, d\mu \cdot \log p$. Qu'en est il pour $d \geq 2$?*
- *Principe variationnel ? Mesure d'entropie maximale ?*

Merci pour votre attention !