Autour de l'ensemble de Cantor

Leçons concernées : Connexité, Dénombrabilité en analyse, Utilisation de la compacité, Théorème de point fixe

L'ensemble de Cantor par ses propriétés topologiques remarquables me semble un exemple pertinent à citer dans le plan des leçons ci-dessus. Les théorèmes 1 (Dénombrabilité en analyse, Utilisation de la compacité) et 2 (Connexité, Dénombrabilité en analyse, Utilisation de la compacité) peuvent de plus faire de bon développements.

1 Définitions

1.1 Point de vue géométrique

On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-intervalles compacts de $[0,1]$. On considère l'application $F : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ défini par

$$F([a,b]) = [a, a + \frac{b-a}{3}] \cup [a + \frac{2(b-a)}{3}, b]$$

On construit par récurrence une suite d'ensembles $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$C_0 = [0,1],\ C_1 = F(C_0),$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = \bigcup_{I \text{ c.c. de } C_n} F(I)$$

L'union portant sur l'ensemble des composantes connexes (c.c.) I de C_n.

Définition 1. *L'ensemble de Cantor noté C est défini par*

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

1.2 Développement triadique

Définition 2. *L'ensemble de Cantor C est l'ensemble des points de $[0,1]$ admettant un développement triadique composé de 0 et de 2, c'est à dire*

$$C := \{x \in [0,1],\ \exists (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*},\ x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k}\}$$

Rappelons que le développement triadique n'est pas unique en général : 1000... et 0222... sont deux développement triadiques de $\frac{1}{3}$. Cependant pour tout $x \in C$, il existe une unique suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $x = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{3^k}$.

1.3 Point de vue dynamique

Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & 3x-[3x] \end{array}$$

où $[t]$ désigne la partie entière de $t \in \mathbb{R}$.

Définition 3.

$$C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}\left([0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]\right)$$

Remarquez que $f(C) \subset C$.

1.4 Coïncidence des définitions

L'équivalence des Définitions 1 et 2 vient du fait que :

$$C_n = \{x \in [0,1],\ \exists (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}^{\in} \{0,1,2\}^{\mathbb{N}^*}\ avec\ a_1,...,a_n \in \{0,2\},\ x = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{3^k}\}$$

et l'équivalence des Définitions 1 et 3 de :

$$C_n = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(C_1)$$

1.5 Conjugaison avec le décalage

Considérons le décalage σ sur l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,2\}$:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \{0,2\}^{\mathbb{N}} & \to & \{0,2\}^{\mathbb{N}} \\ & (a_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & (a_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} \end{array}$$

La fonction $f : C \to C$ définie au paragraphe précédent est "conjuguée" au décalage σ :

$$\pi \circ \sigma = f \circ \pi$$

avec

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \{0,2\}^{\mathbb{N}} & \to & C \\ & (a_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{3^{k+1}} \end{array}$$

L'application π est bijective. La surjectivité résulte de la Définition 2 de l'ensemble de Cantor. Enfin remarquons que si $x \in \pi((a_k)_{k\in\mathbb{N}})$, alors $f^n(x) \in [\frac{a_n}{3}, \frac{a_n+1}{3}]$. D'où l'injectivité de π. L'ensemble $\{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$ n'étant pas dénombrable, on obtient :

Corollaire 1. *L'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable.*

Aussi on déduit de la surjectivité de π et de $\sigma(\{0,2\}^{\mathbb{N}}) \supset \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ l'inclusion $f(C) \supset C$. Finalement on a donc $f(C) = C$, ce qui s'écrit aussi :

Corollaire 2. $C = \frac{C}{3} + \frac{2+C}{3}$

On verra par la suite que l'ensemble de Cantor C est l'unique compact non vide de $[0,1]$ vérifiant cette propriété.

2 Propriétés topologiques

2.1 Propriétés élémentaires

On munit C_n et C de la topologie induite par la topologie usuelle de $[0,1]$. La suite d'ensembles $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de compacts emboités. On en déduit que C est un **compact (non vide)**.

L'ensemble de Cantor est **d'intérieur vide**. En effet, si $x \in C$, il existe d'après la définition 2 une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$, telle que $x = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{3^k}$. Notons pour tout entier n,

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{23^{n+1}}$$

On remarque alors que $y_n \notin C$ pour tout entier n et $y_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$.

L'ensemble de Cantor est **sans point isolés**. En effet, si $x \in C$, considérons de nouveau son développement triadique $x = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{3^k}$ avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$. Notons pour tout entier n,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \in C$$

et on a

$$x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$$

Notons $\mathcal{C}_n := \{I \cap C,\ I \text{ c.c. de } C_n\}$ pour tout entier n. Alors $\mathcal{C} := \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{C}_n$ est une base dénombrable d'ouverts de C.

Remarque 1. *Le complémentaire du Cantor s'écrit comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ comme une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints*

$$[0,1] - C = \coprod_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Puisque C est d'intérieur vide, la frontiére de $[0,1]-C$ est égale à C, donc non dénombrable. En particulier,

$$\partial([0,1] - C) \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial I_n$$

On munit $\{0,2\}$ (resp. $\{0,1\}$) de la topologie dicrète et $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$)de la topologie produit. Cette topologie est métrisable $d((a_k),(b_k)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|a_k-b_k|}{3^k}$. D'après le théorème de Tychonov, $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) muni de cette topologie est compact.

Proposition 1. *L'application $\pi : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to C$ est un homéomophisme.*

Preuve : L'application π est clairement continue. C'est donc un homéomorphisme comme application continue bijective entre deux espaces compacts. $\square$

2.2 Produit de Cantors

On commence par un rapide rappel sur la topologie produit :

Proposition 2. *Soient $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologique et X un autre espace topologique. On munit $\prod_{i\in I} Y_i$ de la topologie produit. Une fonction $f : X \to \prod_{i\in I} Y_i$ est continue ssi pour tout $i \in I$, la i^{eme} coordonnée f_i de f est continue.*

On en déduit (la preuve est laissée au lecteur) que si E et F sont deux ensembles bijectifs et X un espace topologique alors X^E et X^F sont homéomorphes et donc d'après la Proposition 1 :

Corollaire 3. *C, C^n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $C^{\mathbb{N}}$ sont homéomorphes.*

2.3 Image continue d'un Cantor

Nous montrons dans ce paragraphe que tout espace métrique compact est l'image continue d'un Cantor :

Théorème 1. *Soit (X, d) un espace métrique compact, il existe une surjection continue de C sur X.*

Nous commençons tout d'abord par quelques lemmes :

Lemme 1. *Tout espace métrique précompact (X, d) est séparable.*

Preuve : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $D_n \subset X$ de cardinal fini tel que $X = \bigcup_{x\in D_n} B(x, \frac{1}{n})$. Le sous-ensemble $D := \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ de X est dénombrable et dense dans X. □

Lemme 2. *Tout espace métrique compact se plonge dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, i.e. il existe une application continue injective de X dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.*

Preuve : Soit $D = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense dans X. L'application h de X dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ définie par $h(x) = (d(x, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est continue d'après la Proposition 2. Elle est de plus injective : en effet si $h(x) = h(y)$, alors si $(d_{k_n})_n$ est une sous-suite de D convergeant vers x, on a $d(y, d_{k_n}) = d(x, d_{k_n}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ et donc $x = y$. □

Lemme 3. *Soit K un sous-ensemble fermé de C, il existe une rétraction de C sur K, i.e. une application continue $r : C \to K$, telle que $r(x) = x$ pour tout $x \in K$.*

Preuve : Pour $x \in K$, on pose $r(x) = x$. Définissons maintenant $r(x)$ pour $x \in C - K$. On écrit $C - K$ sous la forme $C - K = \coprod_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{C_n}$ avec $\widetilde{C_n}$ des éléments disjoints de $\mathcal{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $y \mapsto d(y, \widetilde{C_n})$ étant continue et K étant compact, il existe $p_n \in Y$ tel que

$$d(p_n, \widetilde{C_n}) = \min_{y\in K} d(y, \widetilde{C_n})$$

Pour $x \in \widetilde{C_n} \subset C - K$, on pose $r(x) = p_n$.

Montrons maintenant que la fonction r ainsi obtenue est continue. La fonction r est clairement continue sur l'ouvert $C - K$ et $r_{/K} = Id_K$. Il suffit donc de montrer que si $(x_n) \in (C - K)^{\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers $x \in K$, alors $(h(x_n))$ converge vers $h(x) = x$. Il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x_n \in \widetilde{C_{\phi(n)}}$. Puisque $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{C_n}$ et que les ensembles $\widetilde{C_n}$ sont fermés,

la suite $(\phi(n))$ tends vers $+\infty$ quand n tends vers $+\infty$. De plus pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre fini d'éléments de $\mathcal{C}$ de diamètre $< \epsilon$. Donc le diamètre de $\widetilde{C_{\phi(n)}}$ tends vers 0 quand n tends vers $+\infty$. Donc

$$\begin{aligned} d(h(x_n), h(x)) &= d(p_{\phi(n)}, x) \\ &\leq d(p_{\phi(n)}, \widetilde{C_{\phi(n)}}) + d(\widetilde{C_{\phi(n)}}, x_n) + d(x_n, x) \\ &\leq diam(\widetilde{C_{\phi(n)}}) + 0 + d(x_n, x) \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

Nous prouvons maintenant le Théorème 1.

Preuve :
Etape 1 : $X = ([0,1], d(x,y) = |x-y|)$

Il suffit considérer le développement diadique d'un réel de $[0,1]$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} & \to & [0,1] \\ & (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{2^k} \end{array}$$

La fonction f est clairement surjective et continue.

Etape 2 : $X = ([0,1]^{\mathbb{N}}, d((x_k),(y_k)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{2^k})$

$$\begin{array}{rccc} F: & \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}\right)^{\mathbb{N}} & \to & [0,1]^{\mathbb{N}} \\ & (a_k)^p_{k\in\mathbb{N}^*, p\in\mathbb{N}} & \mapsto & (f((a_k)_{k\in\mathbb{N}}))_{p\in\mathbb{N}} \end{array}$$

La fonction F est surjective et continue.

Etape 3 : Cas général

D'après les étapes 1 et 2 et le lemme 3, on a le diagramme suivant, où i désigne les inclusions canoniques et r la rétraction de C sur le sous-ensemble compact $K = F^{-1}(Y)$ de C donné par le lemme 3 :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "r"] \arrow[d] & K = F^{-1}(Y) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & C \arrow[d, "F"] \\ X \arrow[r, "\sim"] & Y \arrow[r, hook, "i"] & {[0,1]^{\mathbb{N}}} \end{tikzcd}$$

□

2.4 Espace totalement discontinu

Théorème 2. *Soit (X,d) un espace métrique compact. Il existe une application continue $h : X \to C$ telle que :*

- *h est constante sur les composantes connexes de X ;*

- *$h_{/A} \neq h_{/B}$ si A et B sont deux composantes connexes distinctes de X.*

Nous commençons par quelques lemmes :

Lemme 4. *Soit X un espace topologique. On considère une composante connexe A de X. Alors pour tout ouvert-fermé D de X (sous-ensemble de X à la fois ouvert et fermé), on a l'alternative suivante :*

- *$D \subset A$;*
- *$D \cap A = \emptyset$.*

Preuve : L'ensemble A s'écrit en effet comme union de deux fermés $A = ((X - D) \cap A) \bigcup (D \cap A)$. Puisqu'il est connexe, l'un de ces deux fermés est vide. □

Lemme 5. *Soit X un espace topologique compact. Soit $p \in X$. L'intersection des ouverts-fermés qui contiennent p est une composante connexe de X.*

Preuve : Il suffit de montrer que l'intersection $C = \bigcap_{t \in T} D_t$ des ouverts-fermés contenant p est connexe. Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints de C(donc de X, l'ensemble C étant fermé) tels que $C = F_1 \coprod F_2$. Les espaces compacts étant normaux, il existe des ouverts disjoints O_1 et O_2 de X tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$. En particulier $C \cap ((X - O_1) \cap (X - O_2)) = \emptyset$. Par compacité de $C = \bigcap_{t \in T} D_t$, il existe $t \in T$ tel que $D_t \cap ((X - O_1) \cap (X - O_2)) = \emptyset$. Supposons par exemple que $p \in F_1 \subset O_1$. Alors $D_t \cap O_1$ est ouvert de X donc de C et un fermé de C car $D_t \cap O_1 \cap C = D_t \cap (X - O_2) \cap C$. Donc il existe $t' \in T$ tel que $D_{t'} = D_t \cap O_1$. En particulier $C \subset O_1$ et donc $F_2 = \emptyset$. □

Lemme 6. *L'ensemble des ouverts-fermés d'un espace métrique compact est dénombrable.*

Preuve : Soit X un espace métrique compact. D'après le lemme 1, X est séparable. En particulier, il admet une base $\mathcal{B}$ dénombrable d'ouverts. Soit F un ouvert-fermé de X. L'ensemble F étant ouvert, il s'écrit comme union d'ensemble de $\mathcal{B}$: $F = \bigcup_{i \in I} B_i$. Mais F étant aussi compact, cette union est fini. □

Nous montrons maintenant le théorème 2 :

Preuve de Théorème 2 : Notons $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des ouverts-fermés de X. On considérons l'application $h : X \to C$ défini par

$$h(x) = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{1}_{D_n}(x)}{3^n} = \pi((2 \times \mathbb{1}_{D_n}(x))_n)$$

- si $x, y \in X$ appartiennent à la même conposante connexes, ils appartiennent aux mêmes ensembles ouverts-fermés d'après le lemme 4 et donc $h(x) = h(y)$;
- si A_1 et A_2 sont deux composantes connexes distinctes de X alors il existe d'après le lemme 5 un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $A_1 \subset D_n$ et $(X - A_2) \cap D_n \neq \emptyset$. D'après le lemme 4, on a même $A_2 \cap D_n = \emptyset$. Donc si $x \in A_1$ et $y \in A_2$, on a $\mathbb{1}_{D_n}(x) \neq \mathbb{1}_{D_n}(y)$. L'application π étant injective, $h(x) \neq h(y)$.

□

Corollaire 4. *Tout espace métrique compact totalement discontinue se plonge dans l'ensemble de Cantor C.*

Par des arguments similaires à la preuve du théorème 2, on peut montrer :

Théorème 3. *Tout espace métrique compact totalement discontinue et sans point isolé est homéomorphe à l'ensemble de Cantor C.*

Théorème 4. *Tout espace métrique compact sans point isolé admet un sous-ensemble fermé homéomorphe à l'ensemble de Cantor C.*

3 Autosimilarité

Théorème 5. *L'ensemble vide et l'ensemble de Cantor sont les seuls compacts de $[0,1]$ satisfaisant :*

$$K = \frac{K}{3} \cup \left(\frac{K+2}{3}\right) \tag{1}$$

Remarquez qu'il existe d'autres sous-ensembles stricts de $[0,1]$ vérifiant la relation (1), par exemple l'ensemble des rationnels de $[0,1]$.

Soit (X,d) un espace métrique borné. Notons $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés non vides de X. On muni $\mathcal{F}(X)$ de la métrique de Hausdorf : pour $A, B \in \mathcal{F}(X)$,

$$\rho(A,B) := \max(\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{x\in B} d(x,A))$$

Théorème 6. *Si (X,d) est complet, alors $(\mathcal{F}(X),\rho)$ est complet.*

On trouvera une preuve de ce résultat dans [7]. On va en déduire le Théorème 5.

Preuve de Théorème 5 : L' application $f : \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ définie par $f(K) = \frac{K}{3} \cup \left(\frac{K+2}{3}\right)$ est bien définie et est $\frac{1}{3}$ lipschitzienne. En effet si $K, L \in \mathcal{F}([0,1])$, alors $d(\frac{x}{3}, f(L)) \leq \frac{d(x,L)}{3}$ et $d(\frac{2+x}{3}, f(L)) \leq \frac{d(x,L)}{3}$ pour tout $x \in K$. Donc $\sup_{x\in\rho(K)} d(x,\rho(L)) \leq \frac{\sup_{x\in K} d(x,L)}{3} \leq \rho(L,K)$. On conclut en inversant les rôles de L et K.

L'espace métrique $(\mathcal{F}([0,1]),\rho)$ étant complet, il existe d'après le théorème de point fixe de Picard un unique point fixe $C' \in \mathcal{F}([0,1])$. Or on a déja vu au Corollaire 2 que l'ensemble de Cantor $C \in \mathcal{F}([0,1])$ vérifie $f(C) = C$.

□

4 Mesure de Lebesgue

4.1 Cantor généralisé

On généralise la construction de l'ensemble de Cantor dit "standard" présentée dans la première partie.

Soit $\Lambda = (\lambda_n)_n \in]0,1[^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout entier non nul n, on définit l'application $F_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ par

$$F_n([a,b]) = [a,b] - [a + (b-a)(\frac{1-\lambda_n}{2}, a + (b-a)\frac{1+\lambda_n}{2}]$$

On construit par récurrence une suite d'ensembles $(C_n^\Lambda)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$C_0 = [0,1],\ C_1^\Lambda = F_1(C_0),$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1}^\Lambda = \bigcup_{I \text{ c.c. de } C_n^\Lambda} F_{n+1}(I)$$

l'union portant sur l'ensemble des composantes connexes I de C_n. Au n^{eme} pas de la récurrence on enlève un segment centré en chaque intervalle I de longueur $\lambda_n \times m(I)$.

Définition 4. *L'ensemble de Cantor généralisé associé à $\Lambda = (\lambda_n)_n$ noté Λ est défini par*

$$C^\Lambda := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n^\Lambda$$

Remarquez que l'ensemble de Cantor standard est le Cantor associé à la suite constante égale à $\frac{1}{3}$. On montre comme précédemment que l'application $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to C^\Lambda$ défini par

$$\pi((a_n)_n) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n(1+\lambda_n)}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_{k-1}}{2}$$

avec pour convention $\lambda_0 = 0$ est un homéomorphisme. En particulier tous les Cantors généralisés sont homéomorphes au Cantor standard (on aurait aussi pu remarquer que les Cantor standard sont des compacts totalement discontinu sans point isolés et appliquer le Théorème 3).

4.2 Mesure de Lebesgue des ensembles de Cantor

Soit $(\lambda)_n \in]0,1[^{\mathbb{N}^*}$. Notons m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Un calcul immédiat nous donne

$$m(C_n^\Lambda) = \prod_{k=1}^{n} (1-\lambda_k)$$

En particulier puisque $C^\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n^\Lambda$, on a

$$m(C^\Lambda) = \prod_{k\in\mathbb{N}^*} (1-\lambda_k)$$

Pour le Cantor standard on obtient $m(\Lambda) = 0$.

Théorème 7. *Pour tout $s \in [0,1[$ il existe une suite $\Lambda = (\lambda_n)_n \in]0,1[^{\mathbb{N}^*}$ telle que $m(C^\Lambda) = s$.*

Le théorème est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 7. *Pour tout $s \in [0,1[$, il existe une suite $(\beta_n)_n \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$s = \prod_{k\in\mathbb{N}^*} \beta_k$$

Preuve : La fonction $e^x = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n!}$ définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. Soit $t \in [0,+\infty[$ tel que $e^t = -\ln s$. Posons, pour tout entier n non nul, $\beta_n = e^{-\frac{t^{n-1}}{n-1!}} \in]0,1[$. Alors on a $\prod_{k\in\mathbb{N}^*} \beta_k = e^{-e^t} = s$. $\square$

Remarque 2. *On sait que tout borélien d'intérieur non vide est de mesure de Lebesgues non nulle. La réciproque est clairement fausse : l'ensemble des irrationnels est d'intérieur vide mais de mesure de Lebesgue non nulle. Cependant, il est a priori moins aisé de construire des contre-exemples compacts. Les Cantors généralisés de mesure positive sont de telle exemples. On peut aussi en obtenir abstraitement par réguralité de la mesure de Lebesgues. Rappelons que si B est un borélien, alors $m(B) = \sup_{K \subset B} m(B)$ le supremum portant sur les sous-ensemble compacts K de B. En particulier en considérant le borélien des irrationnels, on obtient des compacts d'intérieur vide de mesure de Lebesgue positive.*

4.3 Escalier du diable

Construction de l'escalier du diable comme limite croissante de fonctions en escalier...

Théorème 8. *L'escalier de diable $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue dérivable p.p. de dérivée nulle telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. En particulier, elle n'est pas absolument continue ($\int_0^1 f'(t)dt \neq f(1) - f(0)$)*

References

[1] K.Kuratowski, *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*, Monographie de l'enseignement mathématique (1966).

[2] G.Choquet, *Cours de topologie*, Masson (1992).

[3] J.Dugundji, *Topology*, Boston (1966).

[4] L.Schwartz, *Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnel*, Hermmann (1970).

[5] N.Bourbaki, *Topologie générale*, Chapitre 1 à 10.

[6] G.Skandalis, *Topologie et analyse troisième année*, Dunod (2004).

[7] C. Wagschal, *Topologie*, Livrets d'exercices Hermann (1998).