Quelques aspects qualitatifs des EDO

David Burguet

November 18, 2010

Contents

1 Equations différentielles linéaires du second degré : Wronskien et théorème de Sturm

J un intervalle,

(E') : $a_0(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = 0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathcal{C}^1(J)$

L'étude de (E') sur un sous intervalle I de J, où $(a_0)_{/I}$ ne s'annule pas se ramène, en posant $x(t) = u(t)e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{a_1}{a_0}(s)ds}$, à :

(E) : $u''(t) + q(t)u(t) = 0$ avec $q \in \mathcal{C}^1(I)$

Dans la suite on supposera q seulement continue. Rappelons que les solutions de (E) sont définies sur tout I et définissent un espace vectoriel de dimension 2 d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. On s'intéresse dans cette partie :

- aux zéros des solutions de (E) ;
- au caractère borné des solutions.

1.1 Wronskien

Considérons une equation linéaire du premier degré :

(E'') : $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ continue.

Si $f_1, ..., f_d$ sont des solutions de (E'') on définit leur Wronskien $W(f_1, ..., f_d)$ comme suit :

$$W(f_1, ..., f_d) = \det{(f_j)}_{1 \leq j \leq d}$$

Lorsqu'il n y a pas d'ambiguité sur le système de solutions considérés on notera simplement $W = W(f_1, ..., f_d)$. D'un point de vue géométrique le Wronskien représente le volume du parallépipéde formé par les solutions $f_1, ..., f_d$ dans l'espace des phases.

Proposition 1. *1. La famille $f_1, ..., f_d$ est une base de solutions de E ssi il existe $t \in I$ tel que $W(f_1, ..., f_d)(t) \neq 0$. Dans ce cas le Wronskien ne s'annule jamais.*

2.
$$W(f_1, ..., f_d)(t) = W(f_1, ..., f_d)(s)e^{\int_s^t tr(A(u))du}$$

PREUVE : La différentielle du determinant en une matrice M est donnée par $D_M \det(H) = tr(H^t com(M))$. Les fonctions f_i étant des solutions de (E''), la matrice $M(t) = {(f_j)}_{1 \leq j \leq d}$ vérifie $M'(t) = A(t)M(t)$. Par dérivée de la composée et la formule $M^t com(M) = \det(M)I$, on obtient $W'(t) = tr(A(t))W(t)$, puis $W(t) = W(s)e^{\int_s^t tr(A(u))du}$ en intégrant. □

Le wronskien d'une équation différentielle d'ordre supérieur est le wronskien de l'equation différentielle d'ordre 1 associée. On s'intéresse dans cette partie aux equation différentielles d'ordre 2 de la forme (E). Dans ce cas on a $tr(A(t)) = 0$ pour tout $t \in I$ et donc le wronskien d'un système de solutions est constant.

1.2 Théorème de Sturm

Proposition 2. *Les zéros de toute solution non identiquement nulle de (E) sont isolés.*

Autrement dit il n'y a qu'un nombre fini de zeros sur tout compact de I.

PREUVE : Supposons qu'une solution x de (E) admet une infinité de zéros dans un compact $K \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de zéros distincts de x. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(u_n)_n$ converge vers $u \in K \subset I$. Par continuité de x, on a $x(u) = 0$ et de plus, $x'(u) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(u_n)-x(u)}{u_n-u} = 0$. Par unicité de la solution de (E) avec condition initiale (théorème de Cauchy-Lipschitz), on conclut que $x \equiv 0$. □

Théorème 1. *(Théorème de Sturm) Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f \geq g$,*

(E_f) : $x'' + fx = 0$

(E_g) : $x'' + gx = 0$

Toute solution de (E_f) s'annule entre deux zéros consécutifs de toute solution de (E_g).

PREUVE : Soit x_f (resp. x_g) une solution de (E_f) (resp. de (E_g)). Soient $u < v$ deux zéros consécutifs de x_g. On raisonne par l'absurde : supposons que x_f ne s'anule pas sur $]u, v]$. En fait quitte à considérer $-x_f$ ou/et $-x_g$ on peut supposer que $x_g > 0$ et $x_f > 0$ sur $]u, v[$. En particulier $x_g'(u) > 0$ et $x_g'(v) < 0$ (l'inégalité est stricte par la propriété d'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz). Le Wronskien généralisé de x_f et x_g (ces deux fonctions ne sont pas solutions de la même équation différentielle) vérifie :

$$W(x_f, x_g)(u) = x_f(u)x_g'(u) \geq 0$$
$$W(x_f, x_g)(v) = x_f(v)x_g'(v) < 0$$

Ce qui contredit le caractère croissant de W :

$$\begin{aligned}(W(x_f, x_g))' &= x_f x_g'' - x_g x_f'' \\ &= x_f x_g (f - g) \geq 0\end{aligned}$$

□

Corollaire 1. *Si x_1 et x_2 sont deux solutions indépendantes de (E_f) alors il existe exactement un zéro de x_1 entre deux zéros de x_2. Autrement dit les zéros de x_1 et x_2 sont alternés.*

Corollaire 2. *Supposons qu'il existe $M > 0$ (resp. $m > 0$) tel que $q \leq M$ (resp. $m \leq q$) alors si $\alpha < \beta$ sont deux zeros consécutifs d'une solution de (E) alors*

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \ (\textit{resp. } \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}})$$

De plus dans le cas où q est minoré, toute solution admet une infinité de zéros.

1.3 Quelques exemples généraux

1.3.1 q à signe constant

Proposition 3. *On suppose $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$. Alors*

- *toute solution de (E) est de carré convexe;*
- *toute solution non nulle de (E) a au plus un zéro sur $\mathbb{R}^+$;*
- *il existe des solutions non bornées et des solutions bornées non nulles.*

Preuve : Soit x une solution de (E) non identiquement nulle. En dérivant deux fois x^2 on obtient :

$$(x^2)'' = 2(x'^2 - qx^2) \geq 0$$

Si x admettaient deux zeros distincts $\alpha < \beta$ alors $x = 0$ sur $[\alpha, \beta]$ par convexité de x^2, ce qui contredit le caractère isolé des zéros de x.

Soit x_1 la solution de (E) avec conditions initiales $x(0) = x'(0) = 1$. Alors $x_1(t) \geq 1$, $x_1'(t) \geq 1$ et $x_1''(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ par un argument de connexité (l'ensemble des t vérifiant ces conditions est clairement ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^+$). En particulier $x_1(t) \geq 1 + t$ est non bornée et $\frac{1}{x_1} \in L^2(\mathbb{R}^+)$. On cherche une autre solution de (E) par variation de la constante, i.e. sous la forme $x_2(t) = \lambda(t)x_1(t)$. On obtient la condition nécessaire suivante sur λ :

$$\lambda'' x_1 + 2\lambda' x_1' = 0$$

Soit après une résolution formelle,

$$\lambda' = \frac{C}{x_1^2}$$

Puisque $\frac{1}{x_1} \in L^2(\mathbb{R}^+)$, la fonction $x_2 = x_1 \int_t^{+\infty} \frac{1}{x_1^2(u)} du$ est bien définie, positive et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$. De plus on vérifie a posteriori que c'est une solution de (E). Montrons que x_2 est décroissante et donc bornée :

$$\begin{aligned} x_2' &= x_1' \int_t^{+\infty} \frac{1}{x_1^2(u)} du - \frac{1}{x(t)} \\ &\leq \int_t^{+\infty} \frac{x_1'(u)}{x_1^2(u)} du - \frac{1}{x(t)} = 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 4. *On suppose $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante. Alors*

- *les solutions de (E) sont bornées;*
- *toute solution admet une infinité de zéros;*
- *l'amplitude des oscillations décroit, i.e. $[x'(t_1) = x'(t_2) = 0$ et $t_1 \leq t_2] \Rightarrow [|x(t_2)| \leq |x(t_1)|]$.*

PREUVE :

On vérifie que $L = \frac{x'^2}{q} + x^2$ est une "fonction de Lyapunov", où x est une solution de (E) :

$$\left(\frac{x'^2}{q} + x^2\right)' = \frac{-q'}{q^2}x'^2 \leq 0$$

En particulier $x^2(t) \leq L(0)$ pour tout $t \geq 0$ et les solutions de (E) sont donc bornées. De plus si $t_1 \leq t_2$ vérifie $x'(t_1) = x'(t_2) = 0$ alors $x^2(t_2) = L(t_2) \leq L(t_1) = x^2(t_1)$.

Puisque q est minorée toute solution admet une infinité de zeros par le théorème de Sturm. Enfin remarquez que si $t_1 < t_2 < t_3$ sont trois zéros consécutifs d'une solution x de (E) alors

$$t_3 - t_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{q(t_2)}} \leq t_2 - t_1$$

En particulier si q tends vers $+\infty$ en $+\infty$ alors l'écart entre les zéros décroit vers zero. □

1.3.2 q intégrable

Proposition 5. *On suppose que $q \in L^1(\mathbb{R})$. Alors il existe une solution non bornée en $+\infty$.*

PREUVE :

Les solutions bornées en $+\infty$ de (E) vérifie pour tout $0 \leq t < s$:

$$|x'(t) - x'(s)| \leq \|x\|_{\infty,+} \int_t^s |q|$$

D'après le critère de Cauchy, x' a une limite finie l en $+\infty$. Cette limite est nécessairement nulle car $x(t) \simeq_{+\infty} lt$ et x bornée en $+\infty$.

Si toutes les solutions de (E) étaient bornées en $+\infty$ alors le Wronskien d'une base de solutions (x_1, x_2) de (E) satisfait

$$W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_1' x_2 \rightarrow_{+\infty} 0$$

ce qui contredit le fait que le Wronskien d'une base de solution est constant et non nulle.

□

Proposition 6. *On suppose $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.*

- *si $t^2 q(t) \leq \frac{1}{4}$ pour t assez grand, alors toute solution admet un nombre fini de zeros;*
- *si $\liminf t^2 q(t) > \frac{1}{4}$, alors toute solution admet une infinité de zeros.*

PREUVE : Il suffit d'apliquer le théorème de Sturm en considérant l'equation différentielle $x'' + \frac{\lambda}{t^2}x = 0$. La fonction $\sqrt{t}$ est solution pour $\lambda = \frac{1}{4}$ et $t^{\alpha+i\beta}$, avec $\alpha + i\beta$ solution de $X^2 - X + \lambda$, pour $\lambda > \frac{1}{4}$. □

1.3.3 q périodique

Proposition 7. *On suppose que $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π périodique. Alors on a l'alternative suivante :*

- *toute solution non nulle de (E) a au plus un zero;*
- *toute solution de (E) admet une infinité de zeros ("à gauche et à droite").*

De plus si $q \leq 0$ on est dans le premier cas et si $q \geq 0$ et non identiquement nulle on est dans le second cas.

Preuve : Supposons qu'une solution x de (E) s'annule au moins deux fois et notons $t_1 < t_2$ deux zeros consécutifs. La fonction q étant 2π-périodique alors $z_n(t) = x(t + 2\pi n)$ est solution pour tout entier n. Fixons $n > \frac{t_2 - t_1}{2\pi}$. D'après le théorème de Sturm z s'annule entre les deux zeros t_1 et t_2 de x, i.e. il existe $t_3 \in [t_1, t_2]$ tel que

$$x(t_3 + 2\pi n) = z(t_3) = 0$$

Enfin remarquez que $t_3 + 2\pi n > t_3 + t_2 - t_1 > t_2$. On en déduit que l'ensemble des zeros de x est infini à droite. Pour montrer l'infinité à gauche on prend $-n > \frac{t_2 - t_1}{2\pi}$.

Reste à voir que si q est positive ou nulle, et non identiquement nulle, alors les solutions ont une infinité de zéros. Soit a tel que $q(a) > 0$. Considérons la solution x de (E) avec conditions initiale $x(a) = 1$ et $x'(a) = 0$. On a $x''(a) = -q(a)x(a) < 0$. En particulier il existe $a < b$ tels que $x'(b) < 0$. Si x ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$ alors $x'' = -qx \leq 0$ et donc pour $x \geq b$

$$0 < x(t) = x(b) + \int_b^t x'(s)ds \leq x(b) + (t - b)x'(b)$$

On obtient une contradiction car le terme de droite tends vers $-\infty$ en $+\infty$.

□

2 Stabilité des systèmes autonomes

On s'intéresse dans la suite aux systèmes autonomes :

$$(E) \ : \ x' = f(x)$$

avec $f : U \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On supposera que 0 est un équilibre, i.e. $f(0) = 0$. De façon équivalente, la fonction constante égale à 0 est solution de (E). On notera $\phi(t, x_0)$ la valeur au temps t de la solution de (E) avec condition initiale x_0.

Définition 1.

- *L'équilibre 0 est stable si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta \ \forall t \geq 0 \ \forall x_0 \in B(0, \eta), \quad \|\phi(t, x_0)\| < \epsilon$$

- *l'équilibre 0 est asymptotiquement stable si il est stable et si*

$$\exists \eta \ \forall x_0 \in B(0, \eta), \quad \lim_{t \to +\infty} \phi(t, x_0) = 0$$

- *l'équilibre est instable s'il n'est pas stable.*

Remarquez que si l'équilibre est stable alors les solutions passant près de l'équilibre sont "au moins" définies sur $\mathbb{R}^+$. On relie dans la proposition suivante l'assymptotioque stabilité d'une equation différentielle et l'instabilité de l'equation différentielle associée obtenue en renversant le temps.

Proposition 8. *Si* 0 *est un équilibre asymptotiquement stable du système autonome* $x' = -f(x)$ *alors* 0 *est un équilibre instable de* $x' = f(x)$.

PREUVE : L'équilibre 0 de E^- : $x' = -f(x)$ étant asymptotiquement stable, il existe une boule fermée $B(0,r)$ telle que toute solution de E^- avec conditions initiales dans $B(0,r)$ tende vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe x_0 de norme $< \epsilon$ tel que la solution x^+ de E^+ : $x' = f(x)$ avec condition initiale x_0^+ sort de la boule $B(0,r)$. Or si x^- est solution de E^- avec condition initiale x_0^- de norme r et si $x^-(t_0)$ est de norme $< \epsilon$, alors $x^+ = x^-(t_0 - t)$ convient. □

2.1 Cas des systèmes linéaires

On considère le cas où f est donnée par une application linéaire A. Alors $\phi(t, x_0) = e^{tA}x_0$ et on a le théorème de stabilité suivant :

Théorème 2.
- 0 *est stable ssi les valeurs propres* λ *avec* $\ker(A - \lambda Id) = \ker(A - \lambda Id)^2$ *ont une partie réelle négative ou nulle et les valeurs propres* λ *avec* $\ker(A-\lambda Id) \neq \ker(A-\lambda Id)^2$ *ont une partie réelle* < 0;
- 0 *est asymptotiquement stable si les valeurs propres ont toutes une partie réelle* < 0.

2.2 Théorie de Lyapunov

Pour toute fonction différentiable $V : W \to \mathbb{R}$ avec $W \subset U$ ouvert on définit $\dot{V}(x) = D_xV(f(x))$. Remarquez que si x est solution alors $\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t))$.

Théorème 3. *(Lyapunov) Soit* $V : U \to \mathbb{R}$ *continu sur* U *et différentiable sur* $U \setminus \{0\}$ *telle que* $V(0) = 0$ *et* $V(x) > 0$ *pour* $x \neq 0$.

1. *si* $\dot{V} \leq 0$ *sur* $U \setminus \{0\}$, *alors* 0 *est stable;*
2. *si* $\dot{V} < 0$ *sur* $U \setminus \{0\}$, *alors* 0 *est assymptotiquement stable.*

Remarque 1. *Lorsque* $\dot{V} > 0$ *sur* $U \setminus \{0\}$, *alors* 0 *est instable. Ceci découle de la proposition 8 et du point 2 du théorème précédent. Ce résultat ce généralise par le théorème de Cetaev que nous présentons dans la suite.*

Exemple 1. PREUVE : 1. On considère une petite boule fermée centrée en 0 incluse dans U, disons $\overline{B}(0,\delta)$. On note

$$\alpha := \inf_{\partial B(0,\delta)} V$$

et

$$U_0 := \{x \in B(0,\delta),\ V(x) < \alpha\}$$

Remarquez que $\alpha > 0$ et U_0 est ouvert par continuité. Toute solution x avec condition initiale $x_0 \in U_0$ ne sort pas de $B(0,\delta)$ (et de U_0). En effet remarquez d'abord que $V(x(t))$ est décoissante car $\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \leq 0$ et donc $V(x(t)) \leq V(x_0) < \alpha$ car $x_0 \in U_0$. Puis, par continuité, la trajectoire de x doit rencontrer la frontiére de $B(0,\delta)$ si on sort de cette boule, i.e. il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) \in \partial B(0,\delta)$, et alors $V(x(t_0)) \geq \alpha$, ce qui contredit notre première remarque.

2. Avec les notations du 1., supposons qu'il existe une solution x avec condition initiale dans U_0 qui ne converge pas vers 0. Par compacité il existe $0 \neq z_0 \in B(0,\delta)$ et une suite t_n de réels positifs tendant vers l'infini tels que $x(t_n) \xrightarrow{n} z_0$. Par continuité et décroissance stricte de V le long de la trajectoire, on a $V(x(t_n)) > V(z_0)$ pour tout n. Notons z la solution avec condition initiale z_0. Alors pour s petit on a $V(z(s)) < V(z_0)$. Par continuité de V et par continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, $V(x(s+t_k)) < V(z_0)$ pour k assez grand et s petit, ce qui contredit que V décroisse strictement le long de la trajectoire de x et que $V(x(t_n)) > V(z_0)$ pour tout n.

$\square$

On considère le système autonome

$$\begin{aligned} x' &= 2y(z-1) \\ y' &= -x(z-1) \\ z' &= -z^3 \end{aligned}$$

Montrer que l'équilibre $(0,0,0)$ est stable. On cherchera une fonction de Lyapunov de la forme $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$.

On énonce maintenenant le théorème de Cetaev :

Théorème 4. *(Cetaev) Soit $W \subset U$ un ouvert contenant 0 dans sa frontière et soit $V : \overline{W} \to \mathbb{R}$ une fonction continue différentiable sur W tel que*

- *$V > 0$ sur W;*
- *$V = 0$ sur la frontière de W dans U (i.e. l'ensemble des points de $U \setminus W$ adhérents à W);*
- *$\dot{V} > 0$ sur W;*

Alors 0 est un équilibre instable.

Preuve : Soit $0 \neq x_0 \in B(0,\delta) \cap W$ arbitrairement proche de 0 (ce qui est possible car $0 \in \partial W$). Supposons que la solution maximale x avec condition initiale x_0 ne sorte pas de $B(0,\delta)$ (en particulier x est définie sur $\mathbb{R}^+$), alors $x(t)$ appartient au compact $K := \{y \in \overline{B}(0,\delta) \cap \overline{W},\ V(y) \geq V(x_0) > 0\}$ pour tout $t \geq 0$. Sinon pour $T = \sup\{t > 0,\ x([0,t]) \in K\}$ on a $x(T) \in \partial K$. Mais $V(x(T)) \geq V(x_0)$ car $\dot{V} > 0$ sur W. Par conséquent $x(T)$ appartient à $\partial W \cap B(0,\delta)$ qui est contenu dans la frontière de W dans U (rappelons que $\overline{B}(0,\delta) \subset U$). Mais ceci contredit l'hypothèse que V s'annule sur cette frontière. $\square$

Remarque 2. *La remarque après le théorème de Lyapunov peut être vu comme une conséquence du théorème de Cetaev appliqué avec $W = U \setminus \{0\}$.*

Exemple 2. On considére le système

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1^3 + x_2 x_1^2 \\ x_2' &= -x_2 + x_1^2 \end{aligned}$$

Montrer que l'équilibre 0 est instable. Considérer la fonction de Lyapunov $V(x_1,x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}$ sur l'ouvert $W := \{-x_1 < x_2 < x_1\}$.

2.3 Linéarisation

Théorème 5. *Notons $Sp(D_0f)$ le spectre de la différentielle de f au point d'équilibre 0. Alors*

1. *si $Sp(D_0f) \subset \{Re(z) < 0\}$ alors 0 est un équilibre asymptotiquement stable;*
2. *si $Sp(D_0f) \cap \{Re(z) > 0\} \neq \emptyset$ alors 0 est un équilibre instable;*
3. *si $Sp(D_0f) \subset \{Re(z) \leq 0\}$ on ne peut pas conclure.*

La preuve des points 1 et 2 s'appuie respectivement sur les théorèmes de Lyapunov et Cetaev de la section précédente.

On rappelle tout d'abord un lemme d'algèbre linéaire. Celui-ci se démontre simplement avec la formule de Jordan réelle.

Lemme 1. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ telle que $Sp(A) \cap \{Re(z) > 0\} \neq \emptyset$. Alors il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée b de signature $(i, d-i)$ avec $i = \sharp\{Sp(A) \cap \{Re(z) > 0\}\}$ et une constante $c > 0$ telle que pour tout x dans le cône $b(x,x) > 0$,*

$$b(x, Ax) > c\|x\|^2$$

PREUVE :

Notons $E^+ \subset \mathbb{R}^d$ et $E^- \subset \mathbb{R}^d$ les sous espaces (réels!) stables associés respectivement aux valeurs propres de partie réelle strictement positives et aux valeurs propres de parties réelles négatives ou nulle de A et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on écrira $x = x^+ + x^-$ avec $x^+ \in E^+$ et $x^- \in E^-$. On choisit tout d'abord $\epsilon > 0$ petit tel que les valeurs propres de $A_\epsilon = A - \epsilon Id$ soit de partie réelle non nulle et tel que A et A_ϵ aient le même nombre de valeur propres de partie réelle strictement positive. Considérons A_ϵ^+ et A_ϵ^- les endomorphismes de E^+ et E^- induits par A.

On définit astucieusement un produit scalaire sur E^+ comme suit. Pour tout $x^+, y^+ \in E^+$

$$< x^+, y^+ >_{\epsilon^+} = < x^+, B^+ y^+ >$$

où B_ϵ^+ est la matrice symétrique définie positive $B_\epsilon^+ = \int_0^{+\infty} e^{-s\,^t A_\epsilon^+} e^{-sA_\epsilon^+} ds$. L'intérêt de ce produit scalaire réside dans la relation suivante :

$$B_\epsilon^+ A_\epsilon^+ + ^t A_\epsilon^+ B_\epsilon^+ = Id$$

et donc pour tout $x^+ \in E^+$:

$$\begin{aligned} 2 < A_\epsilon^+ x^+, x^+ >_{\epsilon^+} &= < \left(B_\epsilon^+ A_\epsilon^+ + ^t A_\epsilon^+ B_\epsilon^+\right) x^+, x^+ > \\ &= \|x^+\|^2 \end{aligned}$$

L'espace E^+ correspondant aux valeurs propres de A de partie réelle strictement positive, il existe une constante C tel que pour tout ϵ petit :

$$\|x^+\|_{\epsilon^+}^2 \leq C\|x^+\|^2$$

De même on définit un produit scalaire $<,>_{\epsilon^-}$ sur E^- avec $B_\epsilon^- = \int_0^{+\infty} e^{s\,^t A_\epsilon^-} e^{sA_\epsilon^-} ds$ et on vérifie pour tout $x^- \in E^-$:

$$< 2A_\epsilon^- x^-, x^- >_{\epsilon^-} = -\|x^-\|^2$$

Montrons que la forme bilinéaire b induite par la forme quadratique non dégénérée q définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ par $q(x) = \|x^+\|^2_{\epsilon^+} - \|x^-\|^2_{\epsilon^-}$ convient. On a

$$\begin{aligned} b(x, Ax) &= b(x, A_\epsilon x) + \epsilon q(x) \\ &= < A_\epsilon^+ x^+, x^+ >_{\epsilon^+} - < A_\epsilon^- x^-, x^- >_{\epsilon^-} + \epsilon q(x) \\ &= \frac{\|x^+\|^2 + \|x^-\|^2}{2} + \epsilon q(x) \\ &\geq \frac{\|x^+\|^2 + \|x^-\|^2}{2} - \epsilon \|x^-\|^2_{\epsilon^-} \end{aligned}$$

Maintenant si on suppose x dans le cône $q(x) = \|x^+\|^2_{\epsilon^+} - \|x^-\|^2_{\epsilon^-} > 0$, on obtient (rappelons que $\|x^+\|^2_{\epsilon^+} \leq C\|x^+\|^2$) :

$$b(x, Ax) > \left(\frac{1}{2} - C\epsilon\right)\left(\|x^+\|^2 + \|x^-\|\right)^2$$

On choisit $\epsilon < \frac{1}{4C}$, puis on conclut par équivalence des normes $\|x\|$ et $\sqrt{\|x^+\|^2 + \|x^-\|^2}$. □

On peut aussi démontrer ce théorème en utilisant la décomposition de Jordan réelle, mais dans le cas général la preuve devient un peu plus technique. Cependant cela devient un exercice simple lorsque la matrice est diagonalisable.

Preuve de Point 1 : Soit $<,>_f$ le produit scalaire associé à $-D_0 f$ donné par le lemme précédent. Montrons que $V(x) = \|x\|^2_f$ est une fonction de Lyapunov satifaisant les hypothèse du théorème 1. On a

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2 < x, f(x) >_f \\ &\leq 2\left(< x, D_0 f(x) >_f + 2 < x, f(x) - D_0 f(x) >_f\right) \\ &\leq -2c\|x\|^2 + 2 < x, f(x) - D_0 f(x) >_f \end{aligned}$$

Or d'après linégalité de Cauchy-Schwartz, on a $| < x, f(x) - D_0 f(x) > |_f \leq \|x\|_f \|f(x) - D_0 f(x)\|_f$. Puis la diférentiabilité de f en 0 s'écrit $\lim_{x\to 0} \frac{\|f(x) - D_0 f(x)\|_f}{\|x\|_f} = 0$. Par équivalence des normes, on en conclut que $\dot{V}(x) \leq -c\|x\|^2$ sur un voisinage U de 0. On vérifie alors facilement les hypothèses du Théorème de Lyapunov. □

Il existe une autre preuve du point 1 qui s'appuie essentiellement sur la méthode de variation de la constante et le lemme de Gronwall.

Preuve de Point 2 : Le cas où $Sp(D_0 f) \subset \{Re(z) > 0\}$ se déduit du point 1 et de la Proposition 8. On considère maintenant le cas restant $Sp(D_0 f) \cap \{Re(z) \leq 0\} \neq \emptyset$. On va montrer que la forme quadratique $V = q$ associée à $D_0 f$ donnée par le lemme 1 est une fonction de Lyapunov satisfaisant les hypothèse du théorème de Cetacev sur le cone positif $\{y,\ q(y) > 0\}$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2b(x, f(x)) \\ &\geq 2\left(b(x, D_0 f(x)) + b(x, f(x) - D_0 f(x)\right) \\ &\geq 2c\|x\|^2 - 2|b\left(x, f(x) - D_0 f(x)\right)| \end{aligned}$$

Remarquez qu'il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de b donc de A telle que $b(x, y) \leq C\|x\|\|y\|$ pour tout x, y. Le terme d'erreur $|l(x, f(x) - D_0 f(x))|$ est donc majorée par $C\|f(x) - D_0 f(x)\|\|x\|$. On choisit alors un voisinage U de 0 tel que $C\|f(x) - D_0 f(x)\| \leq \frac{c\|x\|}{2}$ de sorte que

$$\dot{V}(x) \geq c\|x\|^2$$

Les hypothèses du théorème de Cetaev sont alors facilement vérifiées sur l'ouvert $W = U \cap \{y,\ q(y) > 0\}$.

En fait le premier cas peut être inclus dans le cas général si on utilise le point 3 du théorème de Lyapunov. En effet dans ce cas la forme quadratique est définie positive et $W \cup \{0\}$ est ouvert. □

Preuve de Point 3 : Considérons le système

$$\begin{aligned} x' &= y + \epsilon(x^3 + 2xy^2) \\ y' &= -x + \epsilon y^3 \end{aligned}$$

Clairement 0 est un équilibre et les valeurs propres de $D_0 f$ sont $+/-i$. On va voir que l'équilibre est stable, asymtotiquement stable et instable suivant le signe de ϵ. Remarquez que la fonction $V = x^2 + y^2$ vérifie $\dot{V} = 2\epsilon V^2$. Si $(x(t), y(t))$ est solution alors $V(x(t), y(t)) = \frac{1}{V(x_0, y_0)^{-1} - 2\epsilon t}$. On en déduit :

- $\epsilon = 0$: l'équilibre est donc stable mais pas asymptotiquement. Une base de solutions est en fait donnée par $(\cos(t), \sin(t))$ et $(\sin(t), -\cos(t))$;
- $\epsilon > 0$: l'équilibre est instable. La solution explose au temps $t_0 = \frac{V(x_0, y_0)^{-1}}{2}$;
- $\epsilon < 0$: l'équilibre est asymptotiquement stable.

□

2.4 Système à gradient

Soit $V : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère le système autonome

$$x' = -gradV(x)$$

On déduit de la relation $\dot{V}(x) = -\|gradV(x)\|^2$.

Proposition 9.
- $\dot{V}(x) = 0$ *ssi x est un équilibre;*
- $\dot{V}(x) \leq 0$ *pour tout $x \in U$.*

Corollaire 3. *Si x_1 est un minimum isolé de V alors x_1 est asymptotiquement stable.*

Preuve : Considérer la fonction de Lyapunov $V - V(x_1)$. □

Aux points réguliers, i.e. où le gradient ne s'annule pas, les ensembles $V^{-1}(c)$ (pour $c \in \mathbb{R}$), appelés surface de niveau, sont localement des variétés. En effet si x est un point régulier, il existe $1 \leq i \leq d$ tel que $\partial_i V(x) \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonction implicite qui nous donne une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ près de x tel que $[V(y) = c] \Leftrightarrow [y = g(x_1, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1})]$. Remarquez enfin que le gradient de V et donc les trajectoires sont orthogonales aux surface de niveau.

Exemple 3. Pour $V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$, les équilibres sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1/2,0)$. Les deux premiers sont uniformément stables et le dernier est instable. DESSIN.