TD de Topologie

David Burguet

1 Métrisabilité

Pour les leçons de topologie, il est plus sûr de se placer dans un cadre purement métrique. Toutefois il semble naturel d'utiliser le cadre des espaces topologiques généraux pour étudier des concepts purement topologiques telles que la continuité, la compacité, la connexité ... Si vous choisissez ce dernier cadre, il est bien de connaître des exemples pertinents d'espaces topologiques non métrisables.

Remarquez tout d'abord que la métrisabilité est une propriété topologique : si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme entre deux espaces topologiques X et Y avec X métrisable (notons d_X une métrique de X), alors $d_Y(x,y) = d_X(f^{-1}x, f^{-1}y)$ est une métrique pour la topologie de Y (remarquez aussi que si (X, d_X) est complet, alors (Y, d_Y) l'est aussi).

Les espaces métriques sont des espaces topologiques séparés : deux points distincts admettent des voisinages disjoints. Il est donc clair que tout espace topologique non séparé (par exemple $\mathbb{R}$ muni de la topologie grossière) n'est pas métrisable.

La topologie de la convergence simple sur l'ensemble $\mathcal{F}([0,1],[0,1])$ des fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est non métrisable. On se propose de montrer ce résultat dans l'exercice suivant tiré de [12]. Rappelons que cette topologie est la topologie engendrée par les ensembles de la forme $V_{f,x} := \{g \in \mathcal{F}([0,1],[0,1]) \ : \ |g(x) - f(x)| < \epsilon\}$ pour tout $f \in \mathcal{F}([0,1],[0,1])$, $x \in [0,1]$ et $\epsilon > 0$. Toute suite convergente pour cette topologie converge simplement. Muni de cette topologie, $\mathcal{F}([0,1],[0,1])$ s'identifie à l'ensemble $[0,1]^{[0,1]}$ muni de la topologie produit.

Exercice 1. (Topologie de la convergence simple non métrisable) [12] p. 167, voir aussi [2] p.89-90

1. On appelle fonction simple, toute fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ nulle en dehors d'un nombre fini de points. Montrer que l'ensemble des fonctions simples est dense dans $\mathcal{F}([0,1],[0,1])$.

2. Montrer qu'une fonction non nulle sur une infinité non dénombrable de points n'est pas limites de fonctions simples.

3. En déduire que la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{F}([0,1],[0,1])$ n'est pas métrisable.

Exercice 2. ($[0,1]^{[0,1]}$ n'est pas séquentiellement compact)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tends vers $+\infty$. Notons f_{a_n} la fonction de $L^2([0,1])$ qui à x associe $\sin(a_n x)$.

1. Montrer que $(f_{a_n})_n$ converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,1])$.

2. En raisonnant pas l'absurde montrer que l'on ne peut pas extraire de la suite $(f_{a_n})_n$ une sous suite qui converge Lebesgue presque partout.

3. En déduire que le compact (Tychonov général) $[0,1]^{[0,1]}$ n'est pas séquentiellement compact et donc que $[0,1]^{[0,1]}$ muni de la topologie produit n'est pas métrisable.

Exercice 3. (Une topologie non métrisable sur $\mathbb{R}$ un peu plus fine que la topologie usuelle)
On munit $\mathbb{R}$ de la topologie engendrée par les ensembles de la forme $]a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que cette topologie est strictement plus fine que la topologie usuelle.

2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour cette topologie.

3. Montrer que cette topologie n'est pas à base dénombrable d'ouverts.

4. En déduire que celle-ci n'est pas métrisable.

Il existe une caractérisation topologique des espaces métrisables.

Definition 1. *Un espace topologique X est dit* ***régulier*** *s'il est séparé et si pour tout $x \in X$ et tout fermé F tel que $x \notin F$, il existe un voisinage V_x de x et un ouvert $U \supset F$ qui sont disjoints.*

Vérifier que les espaces métriques et les espaces topologiques compacts sont réguliers.

Théorème 1. *(Urysohn)[3] p.195*
Soit X un espace topologique à base dénombrable d'ouverts. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- *X est métrisable ;*
- *X est régulier.*

2 Théorème de Cantor-Bendixson

On se propose de montrer dans cette partie le théorème de Cantor Bendixson :

Théorème 2. *Tout espace à base dénombrable d'ouverts s'écrit comme la réunion disjointe de deux sous-espace X_1 et X_2 où X_1 est fermé sans points isolé et X_2 est dénombrable.*

Exercice 4. [1] p. 173
Soit A une partie d'un espace topologique X, on dit qu'un point $x \in X$ est un point de condensation de A si, pour tout voisinage V de x, $V \bigcap A$ est non dénombrable. On note A^* l'ensemble des points de condensation de A.

1. Si X admet une base dénombrable d'ouverts, montrer que $A - A^*$ est dénombrable. En déduire que $A^* = A^{**}$.

2. En déduire le Théorème de Cantor Bendixson.

3 Théorème de prolongement de Tietz-Urysohn

Exercice 5. (Urysohn)
Soient (X, d) un espace métrique et F_1, F_2 deux fermés disjoints de X. Montrer qu'il exsite une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que

- $f(x) = 0$ pour $x \in F_1$;
- $f(x) = 1$ pour $x \in F_2$;
- $0 \leq f(x) \leq 1$ pour $x \in X$.

Ce théorème est en fait valide dans un contexte topologique plus général. Un espace topologique est dit **normal** si pour tous fermés F_1, F_2 disjoints, il existe des ouverts disjoints $U_1 \supset F_1$ et $U_2 \supset F_2$. Vérifier par exemple que les espaces métriques et les espaces topologiques compacts sont des espaces normaux. Un espace normal est régulier mais l'inverse est faux. Le lemme d'Urysohn s'écrit alors :

Lemme 1. *[1] p.140*
Un espace topologique X est normal si et seulement si pour tous fermés disjoints F_1, F_2 il existe une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que :

- *$f(x) = 0$ pour $x \in F_1$;*
- *$f(x) = 1$ pour $x \in F_2$;*
- *$0 \leq f(x) \leq 1$ pour $x \in X$.*

Exercice 6. (Tietz)
Soient (X, d) un espace métrique, F un fermé de X et $f : F \to \mathbb{R}$ une application continue. Nous allons montrer l'existence d'une fonction continue $g : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$g_{/F} = f$$

$$\inf_{x\in X} g(x) = \inf_{y\in F} f(y) \text{ et } \sup_{x\in X} g(x) = \sup_{y\in F} f(y)$$

Nous proposons deux preuves. La deuxième tirée de [8] p.64 est élémentaire. Cependant la première [1] p. 146 a l'avantage de se généraliser aux espaces normaux.

1. a. Se ramener tout d'abord au cas où $\inf_{y\in F} f(y) = -1$ et $\sup_{y\in F} f(y) = 1$.

b. Montrer en utilisant le lemme d'Urysohn que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour toute fonction continue $h : F \to \mathbb{R}$ telle que $|h(x)| \leq a$ pour tout $x \in F$, il existe une fonction continue $g : X \to \mathbb{R}$ telle que $|g(x)| \leq \frac{a}{3}$ pour tout $x \in X$ et $|g(x) - h(x)| \leq \frac{2a}{3}$ pour tout $x \in F$.

c. Construire par récurrence une suite de fonctions continues $g_n : X \to \mathbb{R}$ telle que $|g_n(x)| \leq \frac{2^n}{3^{n+1}}$ pour tout $x \in X$ et $|f(x) - \sum_{p=0}^{n} g_p(x)| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$ pour tout $x \in F$. Conclure.

2. a. Se ramener tout d'abord au cas où $\inf_{y\in F} f(y) = 1$ et $\sup_{y\in F} f(y) = 2$.

b. Montrer alors que la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ suivante convient.

$$g(x) = f(x) \textit{ pour } x \in F$$

$$g(x) = \frac{1}{d(x, F)} \inf_{y\in F} [f(y)d(x, y)] \textit{ pour } x \notin F$$

Vous trouverez dans [11] une preuve du théorème de Tietze-Urysohn toujours dans le cas métrique comme conséquence du théorème de l'application ouverte (à mon avis un peu tiré par les cheveux). Une autre démonstration possible utilisant le théorème de Stone-Weierstrass est présentée dans le Hirsh-Lacombes.

Exercice 7. Le théorème de Tietz est-il toujours vrai si l'on condidère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$? Dans $\mathbb{C}^*$? Donnez une condition nécessaire et suffisante sur le degré d'une fonction du cercle dans lui-même $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ pour qu'elle admette un prolongement $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^1$.

Péano a construit explicitement une surjection continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$ (voir [8] et aussi [7] p.228 pour la régularité de la surjection). On en déduit facilement qu'il existe, pour tout entier n, une surjection continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^n$ puis dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ (Vérifier-le). Dans l'exercice suivant, on montre ce résultat en utilisant le prolongement d'Urysohn.

Exercice 8. (Péano) [1] p.205

On rappelle que si X est un espace métrique compact, il existe une surjection continue du Cantor standard C dans X. Montrer qu'il existe une surjection continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Exercice 9. (Hewit)[9]

Montrer qu'un espace métrique est compact si et seulement si toute fonction réelle continue définie sur X est bornée.

Nous rappelons rapidement la notion de **partitions de l'unité**. Soient X un espace topologique normal, $F_1, ..., F_N$ des fermés de X recouvrant X et $U_1, ..., U_N$ des voisinages ouverts de $F_1, ..., F_N$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe des applications $\rho_1, ..., \rho_N$ de X dans $[0, 1]$ telles que $\rho_i(x) = 1$ pour $x \in F_i$ et $\rho_i(x) = 0$ pour $x \notin U_i$. Puique les F_i recouvrent tout X, on a $\sum_{i=1}^{N} \rho_i(x) \geq 1$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, posons $f_i(x) = \frac{\rho_i(x)f(x)}{\sum_{i=1}^{N} \rho_i(x)}$ pour tout $x \in X$. La fonction f_i est continue à support dans U_i et $\sum_{i=1}^{N} f_i = f$ et $|f_i| \leq |f|$.

Exercice 10. (séparabilité de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ pour X métrique compact)

Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer que l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f|(x)$ pour $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est séparable (c'est à dire admet un sous-ensemble dénombrable dense).

Exercice 11. (densité des fonctions continues dans $L^p(\mu)$) Soit X un espace topologique et μ une mesure σ-finie. Montrer en utilisant la densité des fonctions étagées et la régularité de la mesure que $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mu)$ pour $1 \leq p < +\infty$

Deux observations relatives à l'exo précédent :

- c'est faux dans $L^\infty(\mathbb{R})$ car une limite uniforme de fonctions continues est continue;
- en utilisant des fonctions plateaux $\mathcal{C}^\infty$ on peut montrer de même que les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sont dense dans $L^p(\mathbb{R})$ sans utiliser la régularisation par convolution.

4 Compacité

Exercice 12. (nombre de Lebesgue)
Soient X un espace métrique compact et $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Montrer qu'il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que tout ensemble de diamètre de diamètre $\leq \epsilon$ soit contenu dans l'un des O_i.

Exercice 13. (Caractérisation des isométries) [6]
Soient X un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application telle que $d(x, y) \leq d(f(x), f(y))$ pour tout $x, y \in X$.

1. On considère $a, b \in X$. Montrer qu'il existe une sous-suite croissante $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers telle que les suites $(f^{n_k}(a))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(f^{n_k}(b))_{k \in \mathbb{N}}$ convergent.
2. Montrer que $(f^{n_{k+1}-n_k}(a))_{k \in \mathbb{N}}$ (resp. $(f^{n_{k+1}-n_k}(b))_{k \in \mathbb{N}}$) converge vers a (resp. vers b).
3. Conclure que f est une isométrie de X.

Exercice 14. (Point fixe)[13] p. 66
Soient X un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tout $x \neq y$. Montrer que f admet un unique point fixe. Soit $x \in X$, montrer que la suite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le point fixe. Donnez un exemple où cette convergence est pôlynomiale (et non exponentielle comme dans le théorème du point fixe pour les applications contractantes d'un espace métrique complet). Que peut-on dire si l'on suppose seulement $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$?

4.1 Théorème de Tychonov

Rappelons tout d'abord que si $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'espaces métriques alors $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est métrisable avec par exemple pour métrique

$$d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{d(x_k, y_k)}{2^k(1 + d(x_k, y_k))}$$

Si de plus les espaces métriques (X_n, d_n) sont des espaces métriques complets, il en est de même de $(\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n, d)$.

Théorème 3. *(Tychonov) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques compacts. On munit le produit $\prod_{i \in I} X_i$ de la topologie produit. Alors $\prod_{i \in I} X_i$ est un espace topologique compact.*

Exercice 15. Montrer le théorème de Tychonov dans le cadre métrique.

4.2 Théorème de Banach-Alaoglu

Soit E un evn. On note E' son dual topologique et on le munit de la topologie faible *. Rappelons que si E est séparable, alors E' est métrisable (si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partie dénombrable dense de E, alors $d(f, g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\langle f-g, a_n \rangle|}{2^n \|a_n\|}$ convient).

Théorème 4. *(Banach,Alaoglu) Soit E un evn, alors la boule unité fermé $B_{E'} := \{f \in E' \ : \ \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \leq 1\}$ du dual E' de E muni de la topologie faible * est compacte.*

Ce théorème est une conséquence du théorème de Tychonov.

Exercice 16. (Krylov-Bogolubov)

Soit (X,d) un espace métrique compact et $T : X \to X$ une application continue. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité borélienne μ invariante par T, c'est à dire :

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \text{ pour tout borélien } A$$

4.3 Métrique de Hausdorff

Un espace métrique est **précompact** si pour tout $r > 0$ on peut le recouvrir par une union finie de boules de rayon r. Rappelons qu'un espace métrique est compact ssi il est précompact et complet.

Exercice 17. [13] p.88

Soit X un espace métrique borné et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés non vides de X. Pour $A, B \in \mathcal{F}$, on pose :

$$\rho(A,B) := \max(\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{x\in B} d(x,A))$$

1. Montrer que ρ est une distance sur $\mathcal{F}$.
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$ convergeant vers A. Montrer que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$.
3. Montrer les propriétés suivantes :

- si X est précompact alors $\mathcal{F}$ est précompact ;
- si X est complet alors $\mathcal{F}$ est complet ;
- si X est compact alors $\mathcal{F}$ est compact.

4.4 Enveloppe convexe d'un compact

Exercice 18. [11]

1. Soit A un compact de $\mathbb{R}^d$ montrer que l'enveloppe convexe $conv(A)$ de A est compact ;
2. Soit A un compact d'un espace de Banach montrer que $conv(A)$ est relativement compact ;
3. Donnez un exemple de compact A dans un Banach, où $conv(A)$ n'est pas compact.

5 Connexité

Un espace topologique X est **connexe** si les seuls sous-ensembles de X ouverts et fermés sont X et $\emptyset$ ou encore s'il n'existe pas d'application continue non constante de X dans un espace topologique discret.

Rappelons quelques propriétés élémentaires :

- soit X un espace topologique et A un sous-ensemble connexe de X, alors tout ensemble B vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe;
- soit X un espace topologique. L'union quelconque d'ensembles connexes d'intersection non vide est connexe;
- l'image continue d'un connexe est connexe;
- soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, alors $\prod_{i\in I} X_i$ est connexe si et seulement si chaque X_i est connexe.

5.1 Exemples de connexes non-connexes par arc

Dans l'exercice suivant, on donne des exemples d'espaces connexes non connexes par arcs. Les exemples 1 et 2 sont similaires : on utilise le fait que l'adhérence d'un ensemble connexe est connexe, ce qui n'est pas vrai pour les ensembles connexes par arcs. Voir aussi Exercice 31 pour un exemple encore plus pathologique. Rappelons aussi que connexité et connexité par arc sont équivalents pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 19. Montrer que les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont connexes, non localement connexes (voir paragraphe 5.4) et non connexes par arc :

- $\{(x, \sin(\frac{1}{x})),\ x \in]0,1]\} \bigcup \{0\} \times [-1,1]$;
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ et } y \geq 0\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in \mathbb{Q} \text{ et } y < 0\}$;
- $\mathbb{S}^1 \bigcup \{\frac{t}{1+t} e^{it}\ :\ t \geq 0\}$.

5.2 Compact connexes emboités

Exercice 20. [13] p.105

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vide d'un espace topologique X.

1.(Compacts emboités) Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide et que pour tout voisinage V de K, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset V$. Montrer que le théorème est faux pour des fermés.

2. Si tous les K_n sont connexes, montrer que K est aussi connexe.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction ayant la propriété des valeurs intermédiaires. On suppose qu'il existe une fonction analytique non constante g telle que $g \circ f$ soit continue. Montrer que f est aussi continue.

Exercice 21. (Théorème du col de montagne)[16]

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$. On suppose que f possède (au moins) deux minima stricts (distincts) a et b. Le but de l'exercice est de montrer que f possède un troisième point critique qui n'est pas un extremum local strict.

1. On suppose $n = 1$. Montrer que f admet un maximum local.

2. On suppose pour n entier quelconque que $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que f admet un maximum global.

3. Dans la suite, on supposera donc $n \geq 2$ et $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$. On va supposer que f n'admet pas d'autre point critique et aboutir à une contradiction.

- Pour tout m dans $\mathbb{R}$, soit K_m la réunion des compacts connexes contenant a et b sur lesquels f est majorée par m. Montrer que K_m est lui-même un compact connexe contenant a et b. Montrer qu'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que $K_M \neq \emptyset$ et $K_m = \emptyset$ pour tout $m < M$.
- Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'intérieur de K_M est connexe.
- En déduire que f admet un point critique qui n'est pas un extremum local strict.

4. Donner un exemple d'une application de classe $\mathcal{C}^1$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$, admettant exactement trois point critiques : deux minimas stricts et un troisième qui ne soit pas un extremum local.

5. En utilisant le théorème du col de montagne, montrer que toute application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, dont la différentielle est inversible en tout point et telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$, est un difféomorphisme. On renvoie à [10] pour une version topologique de ce résultat et des applications aux EDP.

5.3 Espaces topologiques non homéomorphes

Un homéomorphisme de X sur Y induit une bijection entre les composantes connexes de X et celles de Y.

Exercice 22. (espaces toplogiques non homéomorphes)

1. Montrer qu'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à un intervalle ouvert.

2. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes.

3. Montrer que le huit n'est pas homéomorphe au cercle.

5.4 Locale connexité

Voir [7] chapitre Espaces localement trucs.

Un espace topologique est dit **localement connexe** s'il admet une base de voisinages connexes. On montre facilement que :

Proposition 1. *Un espace est localement connexe si et seulement si les composantes connexes de tout ouvert sont ouvertes.*

On se propose de montrer dans l'exercice suivant un théorème de Sierpinski :

Théorème 5. *(Sierpinski)*
Un espace métrique connexe compact X est localement connexe si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, X est la réunion d'une famille finie de parties connexes compactes de diamètre $\leq \epsilon$.

Exercice 23. [13] p. 120
Montrer le théorème de Sierpinski.

5.5 Locale connexité par arc

Un espace topologique est dit **localement connexe par arc** s'il admet une base de voisinages connexes par arc. Rappelons qu'un espace connexe localement connexe par arc est connexe par arc. Comme pour les espaces localement connexes, on a aussi la caractérisation suivante :

Proposition 2. *Un espace topologique est localement connexe par arc si et seulement si les composantes connexes par arc de tout ouvert sont ouvertes.*

Exercice 24. [13] p. 123
Montrer que tout espace métrique compact, connexe et localement connexe par arc est une image continue de l'intervalle $[0, 1]$ (Ceci entraîne en particulier l'énoncé de l'exercice 8).

6 Complétude

La notion de complétude est une notion métrique : un espace topologique peut être muni de deux métriques l'une faisant de cet espace un espace métrique complet, l'autre non. Rappelons l'exemple classique. On considère $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle i.e. associé à la distance $d_1(x, y) = |x - y|$. Il est bien connu que $(\mathbb{R}, d_1)$ est complet. La distance $d_2(x, y) = |arctg(x) - arctg(y)|$ est topologiquement équivalente à d_1. Cependant $(\mathbb{R}, d_2)$ n'est pas complet : toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R}, d_2)$, mais ne converge pas dans $\mathbb{R}$ ... L'exercice suivant permet de généraliser l'exemple précédent.

Exercice 25. [13] p.112
Sur $\mathbb{R}$, on note $d(x, y) = |x - y|$ la distance usuelle. Pour toute fonction injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on considère la distance $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Montrer que :

1. Les distances d et d_f sont topologiques équivalentes si et seulement si f est une application continue.

2. Les distances sont uniformément équivalentes si et seulement si f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ uniformément continu et d'inverse uniformément continu.

3. Les suites de Cauchy pour d et d_f sont les mêmes si et seulement si f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4. $\mathbb{R}$ muni de la distance d_f est complet si et seulement si $f(\mathbb{R})$ est fermé.

6.1 Théorème de Cantor

Théorème 6. *(Cantor) Pour un espace métrique (X,d), les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- *(X,d) est complet ;*
- *pour toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides telle que $\lim_{n\in\mathbb{N}} diam(F_n) = 0$, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$*

Exercice 26. [12] p.168
Montrer le théorème de Cantor. Montrer que la condition sur le diamètre est nécessaire.

6.2 Théorème de Baire

Definition 2. *On dit qu'un espace topologique X est de* ***Baire*** *si tout intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

La propriété de Baire est une propriété topologique : si X et Y sont deux espaces topologiques homéomorphes et si X est de Baire, alors Y est de Baire.

Tout ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire. Les espaces métriques complets et les espaces localement compacts sont des espaces de Baire. L'intervalle ouvert $]0,1[$ muni de la distance usuelle n'est pas complet mais est un espace localement compact. L'ensemble des applications continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme sup est un espace métrique complet non localement compact.

Un produit quelconque d'espaces métriques complets et un produit quelconque d'espaces localement compacts sont aussi des espaces de Baire. ([13] p.33 et p.79). Mais il existe un exemple d'espace de Baire dont le carré n'est pas un espace de Baire. Cependant il est facile de voir que le produit de deux espaces de Baire à base dénombrable d'ouvert l'est encore.

Exercice 27. (union dénombrable de fermés disjoints)
Soit X un espace métrique complet, connexe et localement connexe. Montrer que X ne peut s'écrire comme une réunion infinie dénombrable de fermés non vides deux à deux disjoints.

Exercice 28. (e.v.n.)[8]p.393
Montrer qu'un e.v.n. à base dénombrable n'est pas complet.

Exercice 29. (Nilpotent)
Soit f une application lineaire continue d'un Banach X dans lui-même telle que

$$\forall x \in X,\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^n(x) = 0$$

Alors f est nilpotente i.e. $\exists N \in \mathbb{N},\ f^N = 0$

Exercice 30. (Caractérisation des polynômes)[8]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 0$$

On pose $F_n := \{x \in \mathbb{R} \ :\ f^{(n)}(x) = 0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{o}{F_n}$ et $F = \mathbb{R} - \Omega$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points distincts de $\mathbb{R}$ tendant vers x telle qu'il existe n_0 vérifiant $f^{(n_0)}(x_p) = 0$ pour tout entier p. Montrer que $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.

2. Montrer que sur toute composante connexe de Ω, la fonction f est polynomiale.

3. Montrer que F n'a aucun point isolé.

4. Conclure que f est une application polynômiale.

Dans l'exercice suivant on construit un exemple de connexe non connexe par arc qui devient totalement discontinue en lui enlevant un point particulier.

Exercice 31. (Tipi de Cantor)[15],[14]

Expliquons tout d'abord la construction du tipi. On note $C \subset [0,1]$ le Cantor standard. Rappelons que le complémentaire de C est un ouvert de $\mathbb{R}$ et s'écrit donc comme une union dénombrable d'intervalles ouverts. On note $B \subset C$ le bord de ces intervalles et $D = C - B$. Autrement dit B est l'ensemble des points dont le développement triadique se termine par une infinité de 0 ou par une infinité de 2. Les ensembles B et D sont denses dans C. Si $a, b \in \mathbb{R}^2$, on note $[a,b] := \{a + t(b-a),\ t \in [0,1]\}$ le segment affine reliant a et b.

Pour tout $c \in C$, on définit :

$$T_c := \{(x,y) \in [(c,0), (\frac{1}{2}, 1)],\ y \in \mathbb{Q}\} \text{ pour } c \in B$$

$$T_c := \{(x,y) \in [(c,0), (\frac{1}{2}, 1)],\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\} \text{ pour } c \in D$$

Le tipi de Cantor T est l'ensemble

$$T := (\frac{1}{2}, 1) \cup \left(\bigcup_{c \in C} T_c \right)$$

1. On montre que E est connexe. Raisonnons par l'absurde : T s'écrit comme l'union de deux ouverts disjoints U et V. On peut supposer que $(\frac{1}{2}, 1) \in U$. On considère la fonction hauteur $h : C \to [0,1]$ définie par $h(x) = \sup\{y\ :\ (x,y) \in V \bigcap T_x\}$ si $V \bigcap T_x \neq \emptyset$ et 0 sinon.

a. Montrer que si $c \in D$, alors $h(c) \in \mathbb{Q}$.

b. Montrer que $\overline{h^{-1}(q)}$ est d'intérieur vide.

c. Conclure que T est connexe.

2. Montrer que T n'est pas connexe par arcs.

3. Montrer $T - \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ est totalement discontinu.

Exercice 32. (Limite simple de fonction continue)[7] p.171

Soit X un espace de Baire, (Y,d) un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $C(X,Y)$ convergeant simplement vers f sur X.

1. Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$F_{n,\epsilon} := \{x \in X \mid \forall p \geq n,\ d(f_n(x), f_p(x)) \leq \epsilon\}$$

Montrer que $\Omega_\epsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{o}{F}_{n,\epsilon}$ est un ouvert dense dans X.

2. Montrer que

$$\forall x_0 \in \Omega_\epsilon,\ \exists V \text{ voisinage de } x_0,\ \forall x \in V,\ d(f(x_0), f(x)) \leq \epsilon$$

3. En déduire que l'ensemble $\mathcal{C}(f)$ des points de continuité de f est un $\mathcal{G}_\delta$ dense *.

Exercice 33. (point de continuté d'une fonction continue par rapport à chacune des variables)[13] p.52

Soient X, Y et Z trois espaces métriques et $f : X \times Y \to Z$ une application séparamment continues par rapport à chacune des deux variables.

1. Donner un exemple d'une telle application f qui n'est pas globalement continue.

2. Montrer que si $f : X \to \mathbb{R}^+$ est une fonction semi-continue supérieurement, alors pour tout $a > 0$, le fermé $\partial\{f \geq a\}$ est d'intérieur vide.

*on appelle $\mathcal{G}_\delta$ toute intersection dénombrable d'ouverts

3. Soit $b \in Y$. Pour tout $x \in X$ et $\epsilon > 0$, on pose

$$\Delta_\epsilon(x) = \{\delta \geq 0 \ : \ [d(y,b) < \delta] \Rightarrow [d(f(x,b), f(x,y)) \leq \epsilon]\}$$

Montrer que $\Delta_\epsilon(x) = [0, \delta_{\epsilon(x)}]$ où $\delta_\epsilon : X \to]0, +\infty]$ est une fonction semi-continue supérieurement.

4. On note D l'ensemble des points de discontinuités de f, et on pose

$$D_b := \{x \in X \ : \ (x,b) \in D\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \ : \ \omega(f,(x,b)) > \frac{1}{n}\}$$

avec $\omega(f,(x,b)) = \inf_{V \text{ voisinage de } x} diam f(V)$. On note aussi :

$$F_p(\epsilon) := \{x \in X \ : \ \delta_\epsilon(x) \geq \frac{1}{p}\}$$

Montrer que $X = \bigcup_{p=1}^{\infty} F_p(\epsilon)$, puis que $\bigcup_{p=1}^{\infty} \overset{o}{F_p} (\epsilon) \subset \{x \in X \ : \ \omega(f,(x,b)) \leq \frac{1}{n}\}$ pour $0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{4n}$. En déduire que D_b est maigre.

5. En déduire que si X est un espace de Baire, alors l'ensemble D des points de discontinuités de f est maigre dans $X \times Y$ et d'intérieur vide.

Dans les deux exercies suivants, on montre par des arguments génériques l'existence de fonctions pathologiques, dont la construcion explicite n'est pas élémentaire.

Exercice 34. (fonctions continues nulle part dérivables)[8] p.83 et p.395, [3] p.300
Pour tout $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_{\epsilon,n} := \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1] \ \exists y \in [0,1] \text{t.q.} |x-y| < \epsilon \text{ et } \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| > n \right\}$$

1. Montrer que $U_{\epsilon,n}$ est un ouvert de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

2. Montrer que $U_{\epsilon,n}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ (On considérera par exemples la fonction $x \mapsto f(x) + \delta \sin(Nx)$ avec N bien choisi).

3. En déduire que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ nulle part dérivable est un $\mathcal{G}_\delta$ dense.

Exercice 35. (fonctions $\mathcal{C}^\infty$ nulle part analytique)[3] p.301
On munit $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ de la métrique

$$d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty}{2^n(1 + \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty)}$$

1. Montrer que $(\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R}), d)$ est un espace métrique complet.

2. Pour tout $a \in]0,1[$ et tout entier c, on pose

$$T(a,c) = \{f \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R}) \mid \forall k \in \mathbb{N} \ |f^{(k)}(a)| \leq k! c^k\}$$

Montrer que l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ analytiques en au moins un point est contenu dans $\bigcup_{a \in \mathbb{Q}, c \in \mathbb{N}} T(a,c)$.

3. Montrer que $T(a,c)$ est un fermé d'intérieur vide pour tout $a \in \mathbb{Q}, c \in \mathbb{N}$.

4. Conclure que l'ensemble des fonctions nulle part analytiques contient un $\mathcal{G}_\delta$ dense de $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$.

Exercice 36. Montrer que l'ensemble des points de continuités d'une fonction $f : X \to Y$ avec X un espace topologique quelconque et Y un espace métrique est un $\mathcal{G}_\delta$. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace de Baire (en particulier $\mathbb{Q}$ n'est pas homéomorphe à un espace métrique complet). En déduire que l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas un

$\mathcal{G}_\delta$ puis qu'il n'existe pas de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuités est exactement $\mathbb{Q}$. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ (écriture irréductible avec } p > 0, q > 0)$$

$$f(x) = 0 \text{ si } x \text{ est irrationnel}$$

est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.

> En fait, on a le théorème général suivant qui caractérisent les sous-espaces d'un espace métrique complet, qui sont homéomorphes à un espace métrique complet :
>
> **Théorème 7.** *[3]p. 307*
> *Un sous espace d'un espace métrique complet est homéomorphe à un sous espace métrique complet si et seulement si ce sous espace est un $\mathcal{G}_\delta$.*
>
> En particulier $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ munit de la topologie usuelle (qui est clairement un $\mathcal{G}_\delta$) est homéomorphe à un espace métrique complet.

Exercice 37. Un nombre réel x est dit de Liouville si pour tout entier n il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que

$$0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$$

1. Montrer que l'ensemble des nombre de Liouville est un $\mathcal{G}_\delta$ dense de mesure de Lebesgue nulle.

2. Au moyen de Cantor généralisés construire un autre exemple de $\mathcal{G}_\delta$ dense de mesure de Lebesgue nulle.

References

[1] K.Kuratowski, *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*, Monographie de l'enseignement mathématique (1966).

[2] G.Choquet, *Cours de topologie*, Masson (1992).

[3] J.Dugundji, *Topology*, Boston (1966).

[4] L.Schwartz, *Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnel*, Hermmann (1970).

[5] N.Bourbaki, *Topologie générale*, Chapitre 1 à 10.

[6] G.Skandalis, *Topologie et analyse troisième année*, Dunod (2004).

[7] H.Queffélec, *Topologie*, Dunod (2007).

[8] X.Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses (1994).

[9] N.Tosel et A.Gonnord

[10] A.Ambrosetti et G.Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge university press (1993).

[11] C.Zuily et H.Queffélec, *Eléménts d'analyse*, Dunod (2002).

[12] A.Faisant, *TD et TP de topologie générale*, Hermann (1988).

[13] C. Wagschal, *Topologie*, Livrets d'exercices Hermann (1998).

[14] C. Kuratowski et B. Knaster, *Sur les ensembles connexes*, Fundamenta Mathematicae, Tome 2 (1921).

[15] Steen et Seebach, *Counterexamples in topology*, page 145.

[16] Y. Jabri, *The mountain pass theorem*, Encyclopedia of mathematics and its applications 95.