Convolution

Exercice 1. ($L^1 * L^p$)
Soient $1 < p < +\infty$ et $(f,g) \in L^1 \times L^p$. Montrer que f et g sont convolables et que $f * g \in L^p$.

Exercice 2. ($L^p * L^{p'}$)
1. Soit $1 < p < +\infty$ et $(f,g) \in L^p \times L^{p'}$. Montrer que f et g sont convolables. Montrer que $f * g$ est uniformément continue et vérifie

$$\lim_{|x| \to +\infty} f * g(x) = 0$$

2. Que peut-on dire pour $p = 1$?

Exercice 3. (Approximation $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité)
1. Donner un exemple d'application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ à support compact.

2. Montrer que $\rho_n := \frac{n^d \rho(n.)}{\|\rho\|_1}$ définit une approximation $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité.

Exercice 4. (Injection de L^1_{loc} dans l'espace des distributions)
Soit $(\rho_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.

1. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * \rho_n$ converge vers f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int f\phi dx = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f = 0$ p.p.

Exercice 5. (Unité)
Montrer que $(L_1(\mathbb{R}^d), +, *)$ est une algèbre non unitaire.

Exercice 6. (Densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$)
Soit $(\rho_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+)_{n\in\mathbb{N}}$ une appoximation de l'unité.

1. Soit $1 \leq p <= \infty$. Montrer que $f * \rho_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. En déduire que $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p.

2. Que peut-on dire pour $p = +\infty$.

Exercice 7. (Caractérisation des fonctions additives)
1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble Lebesgue mesurable de mesure non nulle. Montrer que $A - A := \{a - a' \ : \ a, a' \in A\}$ est un voisinage de 0. (Indication : considérer la fonction $1_A * 1_{-A}$)

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable additive, i.e. pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que f est bornée au voisinage de 0. (Indication : utiliser 1. avec $A_C = \{x \ : \ |f(x)| \leq C\}$)
3. En déduire que f est continue et $\mathbb{R}$ linéaire.

Rappelons enfin l'énoncé de l'inégalité de Young :

Théorème 1. *Soit $(f,g) \in L^p \times L^q$, alors*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

avec $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

Cette inégalité peut se voir comme une conséquence du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. Une application classique de l'inégalité de Young est l'inégalité de Poincarré (Voir Zuily-Queffelec).