Séries de Fourier

Exercice 1. [1] Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $0 < \alpha \leq 1$ et $t_0 \in [0, 2\pi]$. On suppose que f est α Hölder en t_0 :

$$\exists K > 0,\ |f(t_0 + h) - f(t_0)| < K|h|^\alpha$$

Montrer que :

- quand $\alpha < 1$,
$$|\sigma_n(f, t_0) - f(t_0)| \leq \frac{\pi + 1}{1 - \alpha} K n^{-\alpha}$$
- quand $\alpha = 1$,
$$|\sigma_n(f, t_0) - f(t_0)| \leq 2\pi K \frac{\log n}{n}$$

Exercice 2. [5] Montrer qu'une fonction 2π périodique f est analytique si et seulement si il existe $K > 0$ et $a > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n(f)| \leq K e^{-a|n|}$.

Exercice 3. [2] On propose de montrer que $E * L^1 = E$ pour $(E, \|\|_E) = (\mathcal{C}^k_{2\pi}, \|\|_k)$ avec $k \in \mathbb{N}$ ou $(E, \|\|_E) = (L^p_{2\pi}, \|\|_p$ avec $p \in [1, +\infty[$.

Pour ces espaces fonctionnels E, on a clairement $E * L^1 \subset E$. Soit $f \in E$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, telle que :

- $\sum \alpha_n$ diverge ;
- $\sum \alpha_n \|f - K_n * f\|_E$ converge (K_n étant le noyau de Féjer) ;
- $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

2. Montrer que la suite $a_k = \frac{1}{1 + \sum \alpha_n (1 - c_k(K_n))}$ est positive décroit vers 0 et convexe.

3. En considérant $g = f + \sum \alpha_n (f - K_n * f)$, conclure que $L^1 * E = E$.

3. Montrer que $L^2 * L^2 \neq L^2$ et $\mathcal{C}^\infty * \mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty$.

Exercice 4. (Inégalité de Poincarré Wirtinger)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, montrer que :

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt$$

Exercice 5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. Montrer que

$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Exercice 6. Soit P un polynôme trigonométrique de degré n. Montrer que $P' = -P * (2n \sin(nt) K_n(t))$. En déduire l'inégalité de Bernstein :

$$\sup_t |P'(t)| \leq 2n \sup_t |P(t)|$$

Voir [5] pour une version plus forte.

Exercice 7. [1] Soit $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que $\sum \frac{cos(3^n t)}{3^{n\alpha}}$ est une fonction α Hölder. Calculer ses coefficients de Fourier.

Exercice 8. [1] On définit par récurrence les polynômes trigonométriques suivants, dits de Rudin-Shapiro :

$$P_0 = Q_0 = 1$$

$$P_{m+1} = P_m + e^{i2^m t} Q_m(t)$$
$$Q_{m+1} = P_m - e^{i2^m t} Q_m(t)$$

1. Montrer que $|P_{m+1}|^2 + |Q_{m+1}|^2 = 2(|P_m|^2 + |Q_m|^2)$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_n \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $P_m = \sum_{0 \leq n \leq 2^m - 1} \epsilon_n e^{int}$.

3. On pose $f = \sum_{m \geq 1} 2^{-m}(P_m - P_{m-1})$. Montrer que $f \in Lip_{\frac{1}{2}}$ mais $f \notin A_{2\pi}$.

4. On pose $g = \sum_{m \geq 1} 2^{-\frac{m}{2}} \frac{1}{m^2}(P_m - P_{m-1})$. Montrer g est continue et que pour tout $\epsilon > 0$, la somme $\sum_{m \geq 1} |c_m(g)|^{2-\epsilon}$ diverge. Voir aussi p. 99 pour un tel exemple obtenue de façon plus constructive.

Exercice 9. [2] On considère les séries trigonométriques (formelle) de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(nx)$. On suppose que $(a_n)_n$ est une suite positive décroissant vers 0.

1. Montrer que la série est uniformément convergent sur $\delta \leq |x| \leq \pi$ (il en est en fait de même de $\sum_n a_n \cos(nx)$).

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- la série converge uniformément ;
- na_n converge vers 0 ;
- la série est la série de Fourier d'une fonction continue.

Exercice 10. [2] On considère deux suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ tends simplement vers 0 sur un ensemble de mesure non nulle. Montrer que (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

Autres applications bonnes à connaître : la résolution de l'équation de la chaleur [5], l'inégalité isopérimétrique [5], fonction nulle part dérivable avec les séries lacunaires $\sum_n 2^{-n} \cos(2^{-n}t)$ [1].

References

[1] Y.Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Dover publications (1976) Seconde édition.

[2] R.E. Edwards, *Fourier Series, a modern Introduction*, volumes 1 et 2 (1967).

[3] J.Peyrière, *Convolution, séries et intégrales de Fourier* Orsay : Paris onze éd., 1997 ISBN : 2878001400

[4] T.W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press (1988).

[5] C.Zuily et H.Queffélec, *Eléménts d'analyse*, Dunod (2002).

[6] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson.

[7] A. Zygmund, *Trigonométric series*, Cambridge University Press (1968).