

Transformation de Fourier

Exercice 1. Calculer les transformées de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$, de $f(x) = e^{-x^2}$ et de $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ (pour la deuxième, on vérifiera que la transformée de Fourier vérifie une équation différentielle).

Exercice 2. Formule de Poisson

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2k\pi)$ appartient à $L^1_{2\pi}$ et que $\|\phi\|_1^{2\pi} = \|f\|_1$.
2. On suppose que f est continue et que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M(1 + |x|)^{-\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Montrer que ϕ est continue. On suppose aussi que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$ ou bien que $\forall n \in \mathbb{N}, \hat{f}(n) \geq 0$. Montrer, en utilisant le théorème de Féjer, la formule de Poisson :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

Exercice 3. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(\int_{-n}^n f(x)e^{-ix\xi} dx)_n$ converge vers $\mathcal{F}(f)$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En déduire que la transformée de Fourier de $\arctan(\frac{1}{x})$ est $\frac{i\pi}{\xi} (e^{-|\xi|^{-1}})$.

Exercice 4. Transformée de Fourier et produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

1. En utilisant la transformée de Fourier, montrer que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'unité, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonctions $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f \star g = f$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f \star f = f$.

Exercice 5. Transformée de Fourier et produit de convolution dans $L^2(\mathbb{R})$

1. Calculer la transformée de Fourier de $1_{[a,b]}$.
2. La fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ est-elle dans $L^1(\mathbb{R})$? dans $L^2(\mathbb{R})$? Calculer sa transformée de Fourier-Plancherel.
3. On rappelle que si $f, g \in L^2$, alors $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \widehat{fg}$. On note $f_a(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$. Calculer $f_a * f_b$. En déduire que l'équation $f * f = f$ admet une infinité de solutions dans L^2 .

Exercice 6. Densité des translatés dans $L^1(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $\hat{f}(x_0) = 0$. Montrer que $Vect(\tau_x f), x \in \mathbb{R}$ n'est pas dense dans $L^1(\mathbb{R})$, où $\tau_x f(t) = f(t + x)$.

Exercice 7. Densité des translatés dans $L^2(\mathbb{R})$

1. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) = 0$ sur un ensemble de mesure strictement positive. Montrer qu'il existe $g \neq 0$ telle que $\langle g, h \rangle = 0$ pour tout $h \in Vect(\tau_x f, x \in \mathbb{R})$. En déduire que si $Vect(\tau_x f, x \in \mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f) \neq 0$ p.p.

2. Réciproquement on suppose que $\mathcal{F}(f) \neq 0$ p.p., et on suppose que g est orthogonale à $Vect(\tau_x f, x \in \mathbb{R})$. Montrer que la transformée de Fourier de $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ est identiquement nulle. Conclure que $Vect(\tau_x f, x \in \mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Transformée de Fourier d'une fonction impaire

On fixe $f \in L^1(\mathbb{R})$ impaire.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$\hat{f}(x) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt$$

2. Prouver que la fonction $\Phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est définie, continue et bornée sur $[0; +\infty[$.
3. Montrer que l'on a:

$$\int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} -2if(x) \left(\int_x^{Rx} \frac{\sin(u)}{u} du \right) dx$$

En déduire:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \Phi(x) dx$$

4. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = \frac{\arctan x}{\ln(2+x^2)}$$

- (a) Montrer que $g \in C_0(\mathbb{R})$.
- (b) On suppose que g est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f . Montrer que f est nécessairement impaire (presque partout).
- (c) En déduire que g n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Exercice 9. Une équation intégrale

Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s) ds$$

où β est un réel strictement positif.

1. Ecrire cette équation sous la forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
2. En utilisant la transformée de Fourier, prouver qu'il existe une solution si et seulement si $\beta \in]0; \frac{1}{2}[$. Montrer qu'alors cette solution est unique. La déterminer.

Exercice 10. Principe d'incertitude de Heisenberg

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi^2 = 1$.

1. Montrer que $2 \int_{\mathbb{R}} t \phi'(t) \phi(t) dt = -1$.
2. En déduire que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} w^2 |\widehat{\phi}(w)| dw \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 \phi(t) |dt \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}$$

Quand a-t-on l'égalité ?

Exercice 11. Espace de Wiener

On note $W = L^1(\mathbb{R}) \cap F(L^1(\mathbb{R}))$, espace de Wiener constitué des fonctions intégrables qui sont également la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

1. Montrer que $f \in W \iff f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $f \in W \iff f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1; +\infty[$.
3. Montrer que $f \in W \iff \widehat{f} \in W$.
4. Montrer que si $(f; g) \in W^2$ alors $f \star g \in W$ et $fg \in W$.
5. Pour $f \in W$, on pose $N(f) = \|f\|_1 + \|\widehat{f}\|_1$. Montrer que N est une norme de W .
6. Dans cette question, on va prouver que W , muni de la norme N , est un espace de Banach. Pour cela, on considère (f_n) une suite de Cauchy de W pour cette norme.
 - (a) Montrer l'existence de $f \in L^1(\mathbb{R})$ et de $g \in L^1(\mathbb{R})$ tels que $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ et $\|\widehat{f}_n - g\|_1 \rightarrow 0$.
 - (b) Montrer que $\widehat{f} = g$ presque partout.
 - (c) En déduire que la suite de f_n converge dans (W, N) , puis que (W, N) est un espace de Banach.
7. On pose $h(x) = e^{-\pi x^2}$, et on pose $h_n(x) = nh(\frac{x}{n})$, dont on rappelle que c'est une unité approchée.
 - (a) Prouver que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star h_n$ est continue.
 - (b) Prouver que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star h_n$ dans W .
8. (a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\|f \star h_n - f\|_p \rightarrow 0$.
 - (b) En déduire que W est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1; +\infty[$.

Autres choses bonnes à connaître : Résolution de l'équation de la chaleur, valeurs et vecteurs propres de la transformées de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, ...