Théorème d'Ascoli et Applications

David Burguet

September 14, 2010

Contents

1 Caractérisation de la compacité dans le cadre métrique

On rappelle tout d'abord la notion **métrique** de précompacité :

Définition 1. *Un espace métrique (X,d) est dit précompact si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier N et des éléments $x_1, ..., x_N$ de X tels que :*

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \epsilon)$$

Remarque 1. *De façon equivalente, un espace métrique est précompact si pour tout $\epsilon > 0$, il s'écrit comme une union fini de sous ensembles de X de diamètre $< \epsilon$.*

Remarque 2.

- *tout sous-ensemble d'un espace métrique précompact est précompact ;*
- *si $Y \subset X$ avec (X,d) métrique, alors [Y est précompact] $\Leftrightarrow$ [$\overline{Y}$ est précompact] ;*
- *si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont précompacts, alors $(X \times Y, d_{X\times Y})$ avec $d_{X\times Y}((x,y),(x',y')) = \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y'))$ est précompact.*
- *tout espace métrique compact est précompact.*

Proposition 1. *Soit (X,d) un espace métrique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *(X,d) est complet et précompact ;*
2. *(X,d) est compact.*

L'hypothèse de précompacité est bien nécessaire : $\mathbb{R}$ est complet pour la métrique usuelle mais ni compact, ni précompact. L'hypothèse de complétude l'est aussi : $[0,1[$ est précompact mais ni complet ni compact pour la métrique usuelle.

Preuve : Nous montrons seulement l'implication (1) $\Rightarrow$ (2), l'implication réciproque étant bien connu. On utilise la caractérisation séquentielle de la compacité. Considérons $(x_n)_n$ une suite de X. On va en extraire une suite de Cauchy. On peut supposer que cette suite prend une infinité de valeurs, sinon on peut en extraire une suite constante.

On construit par récurrence une suite décroissante $(A_p)_p$ de sous-ensembles infinis de $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ vérifiant $diam(A_p) < \frac{1}{p}$. On pose $A_0 = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Supposons A_p construit et construisons A_{p+1}. Par précompacité, il existe un entier N et des éléments $x_1, ..., x_N$ de X tels que $X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{2(p+1)})$. D'après le principe des tiroirs, il existe un entier $1 \leq i \leq N$ tel que $A_{p+1} := A_p \cap B(x_i, \frac{1}{2(p+1)})$ soit de cardinal infini.

Pour tout entier p, on choisit $\phi(p) \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(p) \geq p$ et $x_{\phi(p)} \in A_p$. La sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ est clairement de Cauchy car pour tout $p, q \geq N$, on a $x_{\phi(p)}, x_{\phi(q)} \in A_N$, donc $d(x_{\phi(p)}, x_{\phi(q)}) \leq diam(A_N) \leq \frac{1}{N}$. L'espace métrique (X,d) étant complet, cette sous-suite converge. $\square$

2 Equicontinuité

Définition 2. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une famille $\mathcal{A}$ de fonctions continues de X dans Y (on notera par la suite $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y) est dite* ***équicontinue en*** *$x \in X$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{A} \ \forall x' \in X \ [d_X(x,x') < \delta] \Rightarrow [d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon]$$

$\mathcal{A}$ est dite uniformément équicontinue si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{A} \ \forall x, x' \in X \ [d_X(x, x') < \delta] \Rightarrow [d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon]$$

Par un argument de compacité, on a :

Proposition 2. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et supposons X compact. Si une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ est équicontinue en tout point de X alors elle est uniformément équicontinue.*

Remarque 3. *$[A$ équicontinue$] \Leftrightarrow [\overline{A}$ équicontinue $]$, où $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Exemple 1.
- Toute famille finie de fonctions continues (resp. uniformément continue) est équicontinue en tout point (resp. uniformément équicontinue) ;
- Pour tout réel $k > 0$, l'ensemble des fonctions k-Lipschitzienne est uniformément équicontinue ;
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue, alors l'ensemble des translatés $\tau_a f = f(. - a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ est uniformément équicontinu ;
- Si $f : X \times Y \to Z$ est continue avec X, Y, Z métriques et X, Y compacts, alors l'ensemble des $f(x, .)$ pour $x \in X$ est uniformément équicontinue ;
- Soient X un espace métrique compact, μ une mesure borélienne finie sur X et $K : X \times X \to \mathbb{R}$ une application continue. On définit l'opérateur de noyau K :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (x \mapsto \int_X f(y) K(x, y) d\mu(y)) \end{array}$$

  Lorsqu'on munit $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ de la norme sup, l'opérateur linéaire T est continue. De plus l'image de la boule unité $B := \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \ \forall x \in X \ |f(x)| \leq 1\}$ est uniformément équicontinue.

3 Théorème d'Ascoli

3.1 Enoncé

Théorème 1. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et supposons X compact. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ est relativement compact (i.e. d'adhérence compacte) pour la topologie de la convergence uniforme * ;*
2. - *$\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de X ;*
   - *$\mathcal{A}(x) := \{f(x), \ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compacte pour tout $x \in X$.*

*cette topologie est mérisable : $\delta(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$

3.2 Autres énoncés(plus faibles)

Théorème 2. *(Y compact) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts. Alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ est relativement compact ssi $\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de X.*

Théorème 3. *(Y evn de dimension finie) Soient (X, d_X) un espace métrique compact et $(E, \|\|)$ un evn de dimension finie. Alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,E)$ est relativement compact ssi*

- *$\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de X ;*
- *$\mathcal{A}(x) := \{f(x),\ f \in \mathcal{A}\}$ est borné pour tout $x \in X$.*

Théorème 4. *(X connexe et Y evn de dimension finie) Soient (X, d_X) un espace métrique compact et connexe et $(E, \|\|)$ un evn de dimension finie. Alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,E)$ est relativement compact ssi*

- *$\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de X ;*
- *Il existe $x \in X$ tel que $\mathcal{A}(x) := \{f(x),\ f \in \mathcal{A}\}$ est borné.*

3.3 Nécessité des hypothèses

- $\mathcal{A}(x)$ relativement compact : $\mathcal{A} := (Id_{[0,1]} + n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ uniformément équicontinue, mais elle n'admet pas de sous suite uniformément convergente dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
- $\mathcal{A}$ uniformément équicontinue : $\mathcal{A} := (\sin(nx))_n$ est une famille de $\mathcal{C}([0,1],[0,1])$, mais elle n'admet pas de sous suite uniformément convergente dans $\mathcal{C}([0,1],[0,1])$.
- X compact : $(\tau_n(x \mapsto \frac{1}{1+x^2}))_n$ est une famille de $\mathcal{C}(\mathbb{R},[0,1])$ uniformément équicontinue, mais elle n'admet pas de sous suite uniformément convergente dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},[0,1])$.

4 Preuve du Théorème d'Ascoli

On notera δ la métrique de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(X,Y)$, i.e. $\delta(f,g) = \sup_{x\in X} d_X(f(x),g(x))$.

Preuve de (1) $\Rightarrow$ (2)

Soit $x \in X$. On suppose $\mathcal{A}$ relativement compact. L'application $\phi_x : \mathcal{C}(X,Y) \to Y$ défini par $\phi_x(f) = f(x)$ est clairement 1-lipschitzienne, donc continue. En particulier $\overline{\mathcal{A}}(x) = \phi_x(\overline{\mathcal{A}})$ est compact. Or il contient le fermé $\overline{\mathcal{A}(x)}$, qui est donc aussi compact.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est équicontinue en x. Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ étant relativement compact, il est aussi précompact. Donc il existe un entier N et des applications $f_1, ..., f_n \in \mathcal{A}$ telles que $A \subset \bigcup_{i=1}^N B_\delta(f_i, \epsilon)$. La famille $\{f_1, ..., f_N\}$ étant finie, elle est équicontinue en x et il existe donc $\alpha > 0$ telle que pour tout $i = 1, ..., N$ on a

$$[d_X(x,x') < \alpha] \Rightarrow [d_Y(f_i(x), f_i(x')) < \epsilon]$$

Soit $f \in \mathcal{A}$, il existe $1 \leq j \leq N$ tel que $\delta(f_j, f) < \epsilon$. On a donc pour $d_X(x,x') < \alpha$:

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f_j(x)) + d_Y(f_j(x), f_j(x')) + d_Y(f(x'), f_j(x')) < 3\epsilon$$

Preuve de (2) $\Rightarrow$ (1)

On montre que $\mathcal{A}$ est précompact, puis que $\overline{\mathcal{A}}$ est complet. D'après la proposition 1, on aura alors la relative compacité de $\mathcal{A}$.

Soit $\epsilon > 0$. La famille $\mathcal{A}$ étant uniformément équicontinue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{A}$, on a $[d_X(x, x') < \alpha] \Rightarrow [d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon]$. Puisque X est compact, il est précompact et il existe donc un entier N et des éléments $x_1, ..., x_N$ de X tels que $X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \alpha)$. Notons $A := \{(f(x_i))_{i=1,...,N},\ f \in \mathcal{A}\} \subset Y^N$. L'ensemble A est précompact car $\mathcal{A}(x_1) \times ... \times \mathcal{A}(x_N)$ l'est comme produit de précompacts et car $A \subset \mathcal{A}(x_1) \times ... \times \mathcal{A}(x_N)$. Donc il existe un entier K et $f_1, ..., f_K \in \mathcal{A}$ tel que

$$\bigcup_{l=1}^{K} B_{d_{Y^N}}((f_l(x_i))_{i=1,...,N}, \epsilon) \supset A$$

Soit $f \in \mathcal{A}$, il existe un entier $1 \leq l \leq K$ tel que $d_{Y^N}((f_l(x_i))_{i=1,...,N}, (f(x_i))_{i=1,...,N}) < \epsilon$.

Soit $x \in X$, il existe un entier $1 \leq i \leq N$ tel que $d_X(x_i, x) < \alpha$.

$$d_Y(f(x), f_l(x)) \leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f_l(x_i)) + d_Y(f_l(x_i), f_l(x)) < 3\epsilon$$

Donc $\mathcal{A}$ est précompact.

Montrons maintenant que $\overline{\mathcal{A}}$ est complet. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $(\overline{\mathcal{A}}, \delta)$. Pour tout entier n, on considère $g_n \in \mathcal{A}$ telle que $\delta(f_n, g_n) < \frac{1}{n}$. La suite $(g_n)_n$ est aussi de Cauchy dans $(\mathcal{C}(X, Y), \delta)$. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\overline{\mathcal{A}(x)}$ étant compact et la suite $(g_n(x))_n$ étant de Cauchy, celle-ci converge. Notons $f(x)$ sa limite. Montrons que la fonction f ainsi définie est en fait limite uniforme de $(f_n)_n$. Soit $\epsilon > 0$, on a pour p et q assez grand et pour tout $x \in X$:

$$d_Y(f_p(x), f_q(x)) \leq \delta(f_p, f_q) \leq \epsilon$$

en faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient :

$$d_Y(f_p(x), f(x)) \leq \epsilon$$

enfin en prenant le supremum en $x \in X$

$$\delta(f_p, f) \leq \epsilon$$

5 Théorème d'Ascoli-Peano-Arzela

U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$
$f : U \to \mathbb{R}^m$ continue
$y' = f(t, y)$ (E)

Définition 3. *Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^n$ telle que*

- $\forall t \in I,\ (t, y(t)) \in U$;
- $\forall t \in I,\ y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 4. $y : I \to \mathbb{R}^m$ *est une solution de (E) avec condition initiale* (t_0, y_0), *i.e.* $y(t_0) = y_0$, *ssi*

- *$\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$;*
- *y est continue ;*
- *$\forall t \in I$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$.*

Théorème 5. *(Ascoli-Peano-Arzela) Soit $(t_0, y_0) \in U$ et soit $r_0 > 0$ et $T > 0$ tels que $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$ et $T \times \sup_{(t,y)\in C} \|f(t, y)\| < r_0$. Alors il existe une solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B}(y_0, r_0)$ de (E) avec conditions initiales (t_0, y_0).*

Remarque 5. *Il n'y a pas unicité en général. En fait il peut y avoir une infinité de solutions. Par exemple pour l'EDO, $y' = 2\sqrt{|y|}$ les fonctions $y_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $y(t) = (t - \lambda)^2$ pour $t \geq \lambda$ et 0 sinon sont solutions pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ avec CI $(0, 0)$.*

Dans la preuve suivante, une subdivision Δ de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ est une partition finie de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$:

$$\Delta := \{t_0 < t_1 < ... < t_N = t_0 + T\}$$

Le pas $\delta(\Delta)$ de la subdivision Δ est défini par

$$\delta(\Delta) := \max_{i=0,\dots,N-1} |t_{i+1} - t_i|$$

Preuve : Pour toute subdivision Δ de $[t_0, t_0 + T]$ on définit $\phi_\Delta : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$ par récurrence :

$$\forall t \in [t_0, t_1]\ \phi_\Delta(t) := y_0 + (t - t_0)f(t_0, y_0)$$

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}]\ \phi_\Delta(t) := \phi_\Delta(t_n) + (t - t_n)f(t_n, \phi_\Delta(t_n))$$

On observe facilement que :

- pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, $\phi_\Delta(t) \in \overline{B}(y_0, r_0)$ car $|\phi_\Delta(t) - y_0| \leq |t - t_0| \sup_{(t,y)\in C} \|f(t, y)\|$;
- ϕ_Δ est continue affine par morceaux et $\sup_{(t,y)\in C} \|f(t, y)\|$-lipschitzienne.

On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli dans $\mathcal{C}([t_0, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$ à $(\phi_{\Delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des subdivisions telles que $\delta(\Delta_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$: il existe une sous suite encore notée $(\phi_{\Delta_n})_n$ convergeant uniformément vers une fonction continue notée ϕ.

Par ailleurs, d'après le théorème des accroissements finis pour les fonctions continues $\mathcal{C}^1$ par morceaux, puis par uniforme continuité de f sur le compact C :

$$\begin{aligned}
\|\phi_{\Delta_n}(t) - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s))ds\right)\| \quad &\leq \quad (t - t_0) \max_{i=0,\dots,N-1} \sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} \|f(s, \phi(s)) - f(t_i, \phi_{\Delta_n}(t_i))\| \\
&\leq \quad t \sup\{\|f(s, y)\|,\ |s - s'| \leq \delta(\Delta_n), \\
&\qquad\qquad |y - y'| \leq \|\phi_{\Delta_n} - \phi\|_\infty + \sup_{|t-s|\leq\delta(\Delta_n)} |\phi(t) - \phi(s)|\} \\
&\xrightarrow{n\to+\infty} \quad 0
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\phi(t) = y_0 + \int_0^t f(s, \phi(s))ds$$

et donc ϕ est solution de (E) d'après la remarque 4. □

6 Critère de compacité L^p

Théorème 6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et ω un ouvert d'adhérence compacte tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. On considère un sous-ensemble borné $\mathcal{F}$ de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$. On suppose que $\forall \epsilon\ \exists 0 < \delta < dist(\omega, \Omega^c)$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon$ pour $f \in \mathcal{F}$ et $|h| < \delta$, alors $\mathcal{F}_{/\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.*

Preuve : Soit $(k_n = \frac{k_1(./n)}{n^d})_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité formé de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact avec $k_1(0) \neq 0$. Puisque $\tau_h f$ converge vers f dans $L^p(\omega)$ uniformément en $f \in \mathcal{F}$, il en est de même de $k_n * f$. En effet d'après l'inégalité de Hölder appliquée à la mesure de probabilité $k_n(x)dx$:

$$\begin{aligned}
\|k_n * f - f\|_p^p &= \int |\int k_n(y)(f(x) - f(x-y))dy|^p dx \\
&\leq \int\int k_n(y)|f(x) - f(x-y)|^p dydx \\
&\leq \sup_{|h| \leq diam(sup(k_n))} \|\tau_h f - f\|_p^p
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble précompact de l'espace complet $L^p(\omega)$. Pour cela il suffit d'après l'observation précédente de montrer que $(k_n * \mathcal{F})_{/\omega}$ est précompact dans $L^p(\omega)$ pour tout entier n. Or $(k_n * \mathcal{F})_{/\overline{\omega}} \subset \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$ est bornée et équicontinue car :

$$\begin{aligned}
k_n * f(x) &= \int k_n(x-y) f(y) dy \\
|k_n * f(x)| &\leq \|k_n\|_\infty \|1_{x - sup(k_n)} f\|_1 \\
|k_n * f(x)| &\leq \|k_n\|_\infty \sup_{f\in\mathcal{F}}(\|f\|_p) Leb(sup(k_n))^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

et pour $0 < h \leq h_0$

$$\begin{aligned}
k_n * f(x+h) - k_n * f(x) &= \int \left(k_n(x+h-y) - k_n(x-y)\right)) f(y) dy \\
|k_n * f(x+h) - k_n * f(x)| &\leq |h| \|k_n\|_{Lip} \|1_{B(x - sup(k_n), h_0)} f\|_1 \\
|k_n * f(x+h) - k_n * f(x)| &\leq |h| \|k_n\|_{Lip} \sup_{f\in\mathcal{F}}(\|f\|_p) Leb(B(sup(k_n), h_0))^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Donc la famille $(k_n * \mathcal{F})_{/\overline{\omega}}$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R}), \|\|_\infty)$ et donc en particulier dans $(L^p(\omega), \|\|_p)$. Par conséquent $(k_n * \mathcal{F})_{/\omega}$ est précompact dans $L^p(\omega)$ pour tout entier n. $\square$

Ce théorème est utile pour montrer la compacité de certains opérateurs différentiels.

Corollaire 1. *L'injection de $H^1([0,1]) := \{f, f' \in L^1([0,1])\}$ dans $L^1([0,1])$ est compact, c.à.d. la boule unité de $H^1([0,1])$ pour la norme $\|f\|_1 + \|f'\|_1$ est relativement compact dans $L^1([0,1])$.*

7 Théorème des familles normales

Définition 4. *Soit X un espace métrique. Une suite exhaustive de compacts pour X est une suite de compacts $(K_n)_n$ telle que :*

- $K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1}$ *pour tout entier n ;*

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{o}{K}_n = X$.

Lemme 1. *Soit X un espace métrique et $(K_n)_n$ une suite exhaustive de compacts associée. Alors pour tout compact K de X, il existe un entier n, tel que $K \subset \overset{o}{K}_n$.*

Par compacité de K, on peut en effet extraire un recouvrement fini du recouvrement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{o}{K}_n$.

Dans la suite Ω désigne toujours un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{H}(\Omega)$ les fonctions holomorphes sur Ω.

Lemme 2. *Tout ouvert Ω de $\mathbb{C}$ admet une suite exhaustive de compact.*

Il suffit de considérer la suite définie par $K_n := \{z \in \mathcal{C},\ |z| \leq n,\ d(z, \mathcal{C} - \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$.

Théorème 7. *Si $\mathcal{F}$ est une famille de $\mathcal{H}(\Omega)$ uniformément bornée sur tout compact, alors toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ contient une sous-suite qui convergent uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω.*

Remarque 6. *La limite de cette sous-suite est aussi holomorphe sur Ω. En effet rappelons qu'une limite uniforme de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω' de $\mathcal{C}$ est holomorphe. Donc si $(K_n)_n$ est une suite exhaustive de compacts, la sous suite converge uniformément sur K_n et donc sur $\overset{o}{K}_n$. La limite est donc holomorphe sur $\overset{o}{K}_n$ pour tout entier n et donc sur Ω puisque $\Omega = \bigcup_n \overset{o}{K}_n$.*

PREUVE : **Etape 1 :** $\mathcal{F}_{/K_n}$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}(K_n, \mathbb{C}), \|\|_\infty)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Fixons un entier n et posons $r_n := \frac{d(K_n, \mathbb{C}-\Omega)}{4}$. On considère $z, z' \in K_n$ tel que $|z - z'| < r_n$. On note $\gamma_n \subset \Omega$ le cercle de centre z et de rayon $2r_n$. Remarquez que pour $\xi \in \gamma_n$, on a $|\xi - z'| \geq |z - \xi| - |z - z'| \geq r_n$. D'après la formule de Cauchy,

$$\begin{aligned}
f(z) - f(z') &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(\xi)}{\xi - z'} \right) d\xi \\
&= \frac{z - z'}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z')} d\xi \\
|f(z) - f(z')| &\leq |z - z'| \frac{\sup_{\xi\in\gamma_n, f\in\mathcal{F}} |f(\xi)|}{2r_n} \\
&\leq |z - z'| \frac{\sup_{\xi\in\overline{B}(K_n, 2r_n), f\in\mathcal{F}} |f(\xi)|}{2r_n}
\end{aligned}$$

La suite $\mathcal{F}$ étant uniformément bornée sur le compact $\overline{B}(K_n, 2r_n) \subset \Omega$, le supremum du membre de droite est fini et les fonctions $\mathcal{F}_{/K_n}$ sont donc Lipschitziennes de rapport $\frac{\sup_{\xi\in\overline{B}(K_n, 2r_n), f\in\mathcal{F}} |f(\xi)|}{2r_n}$. En particulier $\mathcal{F}_{/K_n}$ est uniformément équicontinue. De plus $\mathcal{F}(z)$ est borné pour tout $z \in K_n$ (car le singleton $\{z\}$ est compact) et donc relativement compact. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{F}_{/K_n}$ est relativement compact.

Etape 2 : Extraction diagonale

D'après le théorème de Tychonof, $\prod_n \overline{\mathcal{F}_{/K_n}} \subset \prod_n \mathcal{C}(K_n, \mathbb{C})$ sont des compacts métrisables pour la topologie produit. Donc $\prod_n \mathcal{F}_{/K_n}$ est relativement compact (en effet $\overline{\prod_n \mathcal{F}_{/K_n}} \subset \prod_n \overline{\mathcal{F}_{/K_n}}$). Donc toute suite de $\mathcal{F}$ admet une sous-suite convergeant uniformément sur tous les compacts K_n (au lieu d'utiliser l'argument de compacité de Tychonoff, on peut directement utiliser le procédé diagonal de Cantor, les deux arguments étant en fait équivalents...). Puisque d'après le lemme 1, tout compact est inclus dans l'un des K_n, on en déduit que cette sous-suite converge uniformément sur tout compact.

$\square$