1 Fonctions continues nulles part dérivables

Nous présentons tout d'abord l'exemple historique de fonctions continues nulle part dérivables avec une preuve "moderne".

Théorème 1. *(Hardy 1916)*
Pour tous réels $a > 1$ et $b > 1$, les fonctions $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$W(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} a^{-j} cos(b^j t)$$

$$S(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} a^{-j} sin(b^j t)$$

sont bornées sur $\mathbb{R}$ et continues. De plus on a l'alternative suivante :

- *$a > b$ alors W et S sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$;*
- *$a \leq b$ alors W et S sont nulles part dérivables.*

La fonction W est dûe à Weierstrass 1872 * qui découvrit ainsi les premiers exemples de fonctions continues nulles part dérivables. La preuve (élémentaire) suivante que vous trouverez sûrement dans [2] et [3] n'est pas la preuve originale de Hardy.

Preuve :
On traite uniquement le cas de la fonction W, celui de S étant complètement analogue. La fonction W est clairement bornée et continue comme série normalement convergente de fonctions continues.

On considère une fonction $\mathcal{C}^\infty$ ψ à support inclus dans $[\frac{1}{b}, b]$, telle que $\psi(1) = 1$. La transformée de Fourier définie sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(R)$ étant bijective, il existe une fonction $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\psi = \widehat{\chi}$. Remarquez que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(t)dt = \widehat{\chi}(0) = 0 \tag{1}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} t\chi(t)dt = i\left(\widehat{\chi}\right)'(0) = 0 \tag{2}$$

D'après le théorème de convergence dominée (ou Fubini), on a pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left(b^k\chi(b^k.) * W\right)(t_0) = \sum_{j=0}^{+\infty} a^{-j} \int_{\mathbb{R}} b^k\chi(b^k t)\frac{1}{2}\left(e^{ib^j(t-t_0)} + e^{ib^j(t_0-t)}\right) dt$$

Or pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $\epsilon \in \{+1, -1\}$, on a :

$$\begin{array}{rcc} \int_{\mathbb{R}} b^k\chi(b^k t)e^{i\epsilon b^j t}dt & = & \int_{\mathbb{R}} \chi(t)e^{i\epsilon b^{j-k} t}dt \\ & = & \widehat{\chi}(-\epsilon b^{j-k}) \\ & = & \left\{ \begin{array}{c} 1 \; si \; \epsilon = -1 \; et \; si \; j = k \\ 0 \; sinon \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left(b^k\chi(b^k.) * W\right)(t_0) = \frac{e^{ib^k t_0}}{2a^k} \tag{3}$$

D'après l'équation (1), on peut aussi écrire $\left(b^k\chi(b^k.) * W\right)(t_0)$ sous la forme :

$$\begin{array}{rcc} \left(b^k\chi(b^k.) * W\right)(t_0) & = & \int_{\mathbb{R}} \chi(t)W(t_0 - b^{-k}t)dt \\ & = & \int_{\mathbb{R}} \chi(t)\left(W(t_0 - b^{-k}t) - W(t_0)\right) dt \end{array}$$

Supposons que W est dérivable en $t = t_0$. Notons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $s \in \mathbb{R}^*$ par $F(s) := \frac{1}{s}(W(t_0 - s) - W(t_0))$ et $F(0) = W'(t_0)$. La fonction F est alors une fonction continue (car W est continue et dérivable en t_0) et bornée (car F est continue et tends vers 0 en l'infini, W étant bornée).

*En fait Weierstrass montra seulement que W et S étaient nulle part dérivables pour $\frac{b}{a} > 1 + \frac{3\pi}{2}$

D'après le théorème de convergence dominée ($t\chi(t) \in L^1(\mathbb{R})$ et F bornée),

$$b^k \int_{\mathbb{R}} \chi(t) \left(W(t_0 - b^{-k}t) - W(t_0)\right) dt = \int t\chi(t)F(b^{-k}t) \xrightarrow{k\to+\infty} W'(t_0) \int_{\mathbb{R}} t\chi(t)dt$$

Or d'après (2),

$$\int_{\mathbb{R}} t\chi(t)dt = 0$$

et d'après (3), on a pour tout entier k :

$$b^k \int_{\mathbb{R}} \chi(t) \left(W(t_0 - b^{-k}t) - W(t_0)\right) dt = \frac{b^k e^{ib^k t_0}}{2a^k}$$

On en déduit que $b > a$.

$\square$

Notons $E := (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\|_\infty)$ l'ensemble des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme et E' le sous ensemble de E formé des fonctions nulle part dérivables.

On déduit facilement du Théorème 1 (sans argument de Baire) le corollaire suivant :

Corollaire 1. *E' est dense dans E.*

PREUVE : Il suffit de remarquez que l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ est dense dans E et que si $f \in E$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors $g_n := f + \frac{W_{/[0,1]}}{n} \in E$ est nulle part dérivable et converge vers f dans E quand n tends vers $+\infty$ (W étant par exemple la fonction W de Weierstrass du Théorème 1 avec $a = b = 2$). $\square$

Par un argument de Baire (que vous connaissez bien en général), on peut dire mieux :

Théorème 2. *E' contient un $\mathcal{G}_\delta$ dense, i.e. E est un ensemble gras.*

2 Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ nulle part analytiques

Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière (ou analytique) en $t_0 \in \mathbb{R}$ ssi il existe un voisinage U de t_0 tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\|f^{(n)}\|_{\infty,U}}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty$. La fonction f est alors égale sur U à son développement en série de Taylor en t_0. De plus l'ensemble des points où f est développable en série entière est un ouvert.

La fonction égale à $e^{-\frac{1}{t}}$ sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $\mathbb{R}^-$ est $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas développable en série entière en 0 même si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|f^{(n)}|(0)}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = 0 < +\infty$ (car toutes ses dérivées sont nulles en 0 et donc elle n'est pas égale au voisinage de 0 à son développement en série de Taylor en 0). Dans la suite on s'intéresse à la construction de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ nulle part analytique (c.à.d. développable en série entière en aucun point). Nous commençons par présenter un exemple dû à Lerch :

Théorème 3. *(Lerch)*
*Soit a un **entier** pair non nul, alors la fonction $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :*

$$L(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{cos(a^j t)}{j!}$$

est bornée sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais nulle part analytique.

PREUVE : La série de terme général $(\frac{a^{jk}}{j!})_j$ est normalement convergente pour tout entier k. On en déduit que L est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculons pour tout entier k la dérivée k^{eme} en 0 de $L = Re(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{ia^j t}}{j!})$:

$$\begin{aligned} L^k(0) &= Re\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i^k a^{jk}}{j!}\right) \\ &= Re(i^k)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a^{jk}}{j!}\right) \\ &= Re(i^k)e^{a^k} \end{aligned}$$

Les dérivées en 0 de L croissent trop vite pour être les coefficients d'une fonction analytique en 0. La fonction L étant 2π périodique, elle n'est pas analytique en tous les multiples de 2π. En fait pour tout entier N, on a

$$L = R + \sum_{j=0}^{N} \frac{cos(a^j t)}{j!}$$

où R est une fonction $\frac{2\pi}{a^N}$ périodique. La somme finie $\sum_{j=0}^{N} \frac{cos(a^j t)}{j!}$ étant analytique en tout point, on en déduit que R puis L n'est pas analytique en les multiples de $\frac{2\pi}{a^N}$. Ceci étant vrai pour tout entier N, on a trouvé un ensemble dense de $\mathbb{R}$ où la fonction n'est pas analytique. Puisque l'ensemble des points où une fonction est analytique est un ouvert, on en déduit que L est nulle part analytique. $\square$

Notons $F = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (f et ses dérivées admettent des limites à droite en 0 et à gauche en 1 : d'après le théorème de Borel il revient au même de dire que tout élément de F est la restriction à $[0,1]$ d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie sur tout $\mathbb{R}$). On munit F de la topologie de la convergence uniforme des dérivées : une suite $(f_n)_n$ de F converge f ssi $f_n^{(k)}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ pour tout entier k. Cette topologie est métrisable (mais pas normable...) :

$$d(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|(f-g)^{(n)}\|_\infty}{2^n(1+\|(f-g)^{(n)}\|_\infty)}$$

C'est un exercice élémentaire de montrer que F muni de cette métrique est complet. Une autre propriété remarquable de (F,d) est que les compacts sont exactement les fermés bornés.

On dira que $f \in F$ est analytique en 0 (resp. 1) si elle se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ analytique en 0 (resp. 1). On notera F' le sous-ensemble de F formé des fonctions nulle part analytiques (en aucun point de $[0,1]$).

Corollaire 2. *F' est dense dans F.*

Preuve : Comme dans le corollaire 1, il suffit de remarquer que l'ensemble des fonctions analytiques est dense dans (F,d). Or si $(\rho_n)_n$ est une approximation de l'unité formée de fonctions analytiques bornées (par exemple $\rho_n(x) = \frac{n}{\pi(1+(nx)^2)}$) alors $\rho_n * f$ est analytique pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}$ (utiliser par exemple le théorème sur les intégrales à paramètre holomorphe). De plus lorsque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, la suite de fonctions $(\rho_n * f)^{(k)} = \rho_n * f^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$ quand $n \to +\infty$, pour tout entier k.

On en déduit facilement que pour tout $f \in F$, on a $\left(\rho_n * \widetilde{f}\right)_{/[0,1]} \xrightarrow{n\to+\infty} f$ dans (F,d), où $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de f. $\square$

Comme dans le cas des fonctions continues nulles part dérivables, on peut montrer par un argument de Baire que les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ contiennent un $\mathcal{G}^\delta$ dense de fonctions nulle part analytiques.

Théorème 4. *(Morgenstern)[1]*
F' contient un $\mathcal{G}_\delta$ dense, i.e. F' est un ensemble gras.

Preuve : Pour tout $a \in [0,1]$ et tout $c \in \mathbb{N}^*$, on considère :

$$T(a,c) = \{f \in F \mid \forall k \in \mathbb{N}\ |f^{(k)}(a)| \leq k!c^k\}$$

Si $f \in F$ est analytique en au moins un point $x \in [0,1]$ (c'est à dire $f \notin F'$), alors il existe un voisinage U de x tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\|f^{(n)}\|_{\infty,U}}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty$. En particulier, il existe $a \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$ et $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $f \in T(a,c)$. Donc $F - F' \subset \bigcup_{a\in\mathbb{Q}, c\in\mathbb{N}^*} T(a,c)$. Pour conclure il suffit d'après le théorème de Baire de montrer que les ensembles $T(a,c)$ sont des fermés d'intérieurs vides.

Ces ensembles sont clairement fermés dans (F,d). Montrons qu'ils sont d'intérieur vide. Fixons $a \in]0,1[$ et $c \in \mathbb{N}^*$. Considérons $f \in T(a,c)$ et g une fonction de F tel que $g(x) = \ln(1-2c(x-a))$ pour tout $x \in [a - \frac{1}{4c}, a + \frac{1}{4c}] \cap [0,1]$ (on peut par exemple obtenir g en mutipliant $\ln(1-2c(x-a))$ par une fonction plateau $\mathcal{C}^\infty$ adéquate).

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f + \frac{g}{n}$. On montre tout d'abord que $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$ dans F puis que $f_n \notin T(a,c)$ pour tout entier n.

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|g^{(k)}\|_\infty}{2^k(n+\|g^{(k)}\|_\infty)} \\ &\leq \sum_{k\leq -\log_2(\epsilon)} \frac{\|g^{(k)}\|_\infty}{2^k(n+\|g^{(k)}\|_\infty)} + \epsilon \end{aligned}$$

Enfin pour n assez grand,

$$\sum_{k\leq -\log_2(\epsilon)} \frac{\|g^{(k)}\|_\infty}{2^k(n+\|g^{(k)}\|_\infty)} \leq \epsilon$$

et donc la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans (F,d).

Montrons maintenant que $f_n \notin T(a,c)$:

$$\begin{array}{rcl} |f_n^{(k)}(a)| & = & |f^{(k)}(a) - \frac{1}{n}(2c)^k(k-1)!| \\ & \geq & \frac{(k-1)!}{n}(2c)^k - k!c^k = k!c^k(\frac{2^k}{kn} - 1) \end{array}$$

On en déduit que :

$$\frac{|f_n^{(k)}(a)|}{k!c^k} \xrightarrow{k \to +\infty} +\infty$$

et donc $f_n \notin T(a,c)$. □

P.S. : Les références indiquées n'ont pas été vérifiées

References

[1] R.B. Darst, *Most infinitely differentiable functions are nowhere analytic*, Canad. Math. Bull. 16 (1973), pp. 597-598, Monographie de l'enseignement mathématique (1966).

[2] M. Stoll, *Introduction to Real Analysis.*

[3] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, Fourier Analysis: An Introduction .