Séries de Fourier

David Burguet

October 7, 2010

Contents

1 Notations

$(\mathcal{C}^k_{2\pi}, \|\|_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$: ensemble des fonctions 2π-périodiques muni de la norme $\|f\|_k := \max_{k\in\mathbb{N}} \|f^{(k)}\|_\infty$.

$L^p_{2\pi}$ pour $1 \leq p \leq +\infty$: ensembles des fonctions f boreliennes 2π périodiques telles que $\|f\|_p := (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ pour $p \neq +\infty$ et $\|f\|_\infty := \sup\{a,\ leb(|f| \geq a) \neq 0\} < +\infty$.

$c_0(\mathbb{Z})$: ensemble des suites complexes convergeant vers 0 muni de la norme $\|\|_\infty$.

$l^p(\mathbb{Z})$ pour $1 \leq p < +\infty$: ensemble des suites complexes $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telles que $\|(a_k)\|_p := (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty$.

2 Coefficients de Fourier

Définition 1. *Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$,*

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

Proposition 1. *(Propriétés algébriques)*

- $c_n(\lambda f + g) = \lambda c_n(f) + c_n(g)$;
- $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$;
- $c_n f(. - a) = e^{-ina}c_n(f)$;
- $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$.

Proposition 2. *(Intégration)*
Soit $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$, alors la fonction F définie par $F(t) := \int_0^t f(s)ds$ est continue 2π périodique et $c_n(F) = \frac{c_n(f)}{in}$ pour tout entier $n \neq 0$.

Proposition 3. *(Convolution)*

- $c_n(f * g) = c_n(f) \times c_n(g)$;
- $e^{int} * f = c_n(f)e^{int}$;
- $\left(\sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt}\right) * f = \sum_{k=-N}^N a_k c_k(f) e^{ikt}$.

3 Approximation de l'unité et thèorème de Féjer

3.1 Approximation de l'unité sur le cercle

Comme pour la droite réelle on peut définir une notion d'approximation de l'unité sur le cercle comme suit :

Définition 2. *Une suite $(k_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives 2π périodiques est une approximation de l'unité sur le cercle si :*

- $\int_0^{2\pi} k_n(t)dt = 1$;
- $\forall 0 < \delta < \pi,\ \int_\delta^{2\pi-\delta} k_n(t)dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$

Théorème 1. *Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, alors pout tout $f \in (E, \|\|)$ avec $(E, \|\|) = (\mathcal{C}^k_{2\pi}, \|\|_k)$ avec $k \in \mathbb{N}$ ou $(E, \|\|) = (L^p_{2\pi}, \|\|_p)$ avec $1 \leq p < +\infty$,*

$$\|k_n * f - f\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Remarque 1. *Pour $p = +\infty$ il n'y a pas de convergence en général. Si $f \in L^\infty_{2\pi}$ et si K est un compact inclus dans l'ensemble des points de continuité de f alors $(k_n * f)_n$ converge uniformément sur K vers f. Considérons une approximation de l'unité formée de fonctions continues de sorte que $k_n * f$ est continue. Alors si on pose par exemple $f = 1_{[0,\pi]}$, on a $\limsup_{n\to+\infty} \|k_n * f - f\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ (pour n assez grand, $k_n * f$ atteint la valeur $\frac{1}{2}$ par le TVI).*

3.2 Série de Fourier et de Féjer : convergence en norme

Définition 3. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$, la série de Fourier d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de f, notée $S_n f$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :*

$$S_n f(x) := \sum_{|k|\leq n} c_k(f) e^{ikx}$$

Définition 4. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$, la série de Féjer d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de f, notée $\sigma_n f$ est la moyenne de Césaro de $(S_n f)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\sigma_n f(x) := \frac{1}{n} \sum_{0\leq k\leq n-1} S_k(f) = \sum_{|k|\leq n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k(f) e^{ikx}$$

$$S_n f = f * D_n$$

avec $D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$ et

$$\sigma_n f = f * K_n$$

avec $K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$.

Proposition 4. *$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité mais pas $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Preuve : Vérifions tout d'abord que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)dt &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_k(t)dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $\int_0^{2\pi} D_k(t)dt = 2\pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $0 < \delta < \pi$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(t)dt &= \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1}{n}\left(\frac{sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2 dt \\ &\leq \frac{2\pi}{n\sin^2(\frac{\delta}{2})} \\ &\xrightarrow{n\to+\infty} 0 \end{aligned}$$

$\square$

Remarquez qu'on a en fait que K_n converge uniformément en dehors de tout voisinage de 0.

Corollaire 1. *1.* $[\forall n \in \mathbb{N},\ c_n(f) = 0] \Rightarrow [f = 0]$ *;*

2. les polynômes trigonométriques sont denses dans $(E, \|\|)$ *;*

3. $c_n(f) \xrightarrow{|n|\to+\infty} 0$ *(lemme de Riemann-Lebesgue).*

Preuve : Montrons le lemme de Riemman-Lebesgue. Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et P un polynôme trigonométrique telle que $\|f - P\|_1 < \epsilon$. Alors pour $n > deg(P)$, on a $|c_n(f)| = |c_n(f - P)| \leq \|f - P\|_1 < \epsilon$. $\square$

Remarquez que le lemme de Riemman-Lebesgue s'applique dans une version uniforme : si K est un compact de $L^1_{2\pi}$ alors $c_n(f) \xrightarrow{|n|\to+\infty} 0$ uniformément pour $f \in K$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$ il existe par compacité de K des fonctions $f_1, ..., f_s \in K$ telles que $K = \bigcup_{i=1}^{s} B_{\|\|_1}(f_i, \epsilon/2)$. Puis par des densité des polynômes trigonométriques, il existe $P_1, ..., P_s$ telle que $\|f_i - P_i\|_1 < \epsilon/2$ et donc $K \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\|\|_1}(P_i, \epsilon)$. Alors on conclut comme dans la preuve précédente que $c_n(f) < \epsilon$ pour pour $n > \max_{i=1,...,s} deg(P_i)$ et pour tout $f \in K$.

On peut résumer certaines des propriétés précédentes par le théorème suivant :

Théorème 2. *L'application* $\begin{array}{rccc} F: & (L^1_{2\pi}, \|\|) & \to & (c_0(\mathbb{Z}), \|\|_\infty) \\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$ *est un morphisme d'algèbre de norme* 1 *injectif mais non surjectif.*

On explicitera dans la prochaine partie des suites de $c_0(\mathbb{Z})$ qui ne sont pas réalisés comme coefficients de Fourier d'une fonction de $L^1_{2\pi}$. Mais la non surjectivité de F peut être aussi obtenue par un argument générique au moyen du théorème de l'application ouverte que nous rappelons maintenant.

Théorème 3. *(Application ouverte) Soient* $T : X \to Y$ *une application bijective linéaire continue entre deux espace de Banach, alors* T^{-1} *est continue, i.e. :*

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \|Tx\|_Y \geq \delta \|x\|_X$$

Si l'application F était surjective, alors il existerait $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on ait $\sup_k |c_k(f)| \geq \delta \|f\|_1$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup_k |c_k(D_n)| \leq 1$ et $\|D_n\|_1 \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$.

Dans cette fin de paragraphe on s'intéresse à la vitesse de convergence en norme de la série de Féjer. On montre qu'il existe des fonctions de E dont la convergence des séries de Féjer est arbitrairement lente :

Théorème 4. *Pour tout suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergeant vers* 0*, il existe $f \in E$ tel que $\left(\epsilon_n^{-1}\|f - f * K_n\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée avec $E = (\mathcal{C}^0_{2\pi}, \|\|_\infty)$ ou $E = (L^p_{2\pi}, \|\|_p)$ avec $1 \leq p < +\infty$.*

Preuve : On considère la fonction $q : (E, \|\|) \to \mathbb{R}^+$ définie par $q(f) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n^{-1}\|f - f * K_n\|$. Raisonons par l'absurde et supposons q finie. Cette fonction rélle est alors semi-continue inférieurement comme supremum de fonctions continues et donc $F_k := \{q \leq k\}$ est fermé. Or $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ est un espace complet. D'après le théorème de Baire, il existe un entier k, tel que F_k est d'intérieur non vide. Puisque q est sous-additive, i.e. $q(f + g) \leq q(f) + q(g)$ et F_k est symétrique, i.e. $-F_k = F_k$, l'ensemble $F_k - F_k = F_k + F_k \subset F_{2k}$ est un voisinage de 0 sur lequel q est borné. En particulier q est continue :

$$\exists C \forall f \in E \forall n \in \mathbb{N},\ \|f - f * K_n\| \leq C\epsilon_n\|f\|$$

Fixons N assez grand tel que $C\epsilon_N < \frac{1}{2}$. Puisque $\|e_k\| = 1$ pour tout entier k, on a :

$$\|e_k - e_k * K_N\| = |1 - c_k(K_N)| \leq \frac{1}{2}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient une contradiction au Lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à la fonction $K_N \in \frac{1}{2\pi}$. □

3.3 Convergence ponctuelle de la série de Féjer

Théorème 5. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que la limite $\lim_{h\to 0} f(t_0 + h) + f(t_0 - h)$ existe, alors*

$$\sigma_n f(t_0) \xrightarrow{n\to+\infty} \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h)}{2} =: \widetilde{f}(t_0)$$

Preuve :

En utilisant la parité du noyau de Féjer K_n, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_n f(t_0) - \widetilde{f}(t_0) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\theta}^{\theta} + \int_{\theta}^{2\pi-\theta} K_n(t)\left(f(t_0 - t) - \widetilde{f}(t_0)\right) dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\theta} K_n(t)\left(\frac{f(t_0 - t) + f(t_0 + t)}{2} - \widetilde{f}(t_0)\right) dt\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\theta}^{2\pi-\theta} K_n(t)\left(f(t_0 - t) - \widetilde{f}(t_0)\right) dt\right)
\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite satisfait uniformément en n :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\theta} K_n(t)\left(\frac{f(t_0 - t) + f(t_0 + t)}{2} - \widetilde{f}(t_0)\right) dt\right| &\leq \sup_{0\leq t\leq\theta}\left|\frac{f(t_0 - t) + f(t_0 + t)}{2} - \widetilde{f}(t_0)\right| \\
&\xrightarrow{\theta\to 0} 0
\end{aligned}$$

Quant au second terme, le noyau de Féjer étant une approximation de l'unité, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\theta}^{2\pi-\theta} K_n(t)\left(f(t_0 - t) - \widetilde{f}(t_0)\right) dt\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\|K_n\|_{\infty,[\theta,2\pi-\theta]}\|f - \widetilde{f}(t_0)\|_1 \\
&\xrightarrow{n\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

□

Remarque 2. *On peut montrer que la convergence est uniforme sur tout compact inclus dans les points de continuités de f.*

Théorème 6 (Dérivation de Lebesgue)**.** *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors pour Lebesgues presque tout $t_0 \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\phi(h) := \frac{1}{h}\int_0^h \left|\frac{f(t_0+t)+f(t_0-t)}{2} - f(t_0)\right| dt \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Théorème 7. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ telle que*

$$\phi(h) := \frac{1}{h}\int_0^h \left|\frac{f(t_0+t)+f(t_0-t)}{2} - \widetilde{f}(t_0)\right| dt \xrightarrow{h\to 0} 0$$

alors $\sigma_n f(t_0) \xrightarrow{n\to+\infty} \widetilde{f}(t_0)$. En particulier $\sigma_n f(t) \xrightarrow{n\to+\infty} f(t)$ Lebesgue presque partout d'après le théorème de dérivation de Lebesgue.

Preuve : On commence par obtenir une majoration fine de $K_n(t)$. Pout tout $t \in [0,\pi]$ on a $\frac{t}{\pi} \leq \sin t$. On en déduit que $K_n(t) \leq \frac{\pi^2}{nt^2}$. D'autre part on a $|D_n(t)| \leq 2n+1$ et donc $K_n(t) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2k+1 = n$. On découpe tout d'abord $\sigma_n f(t_0) - \widetilde{f}(t_0)$ en deux intégrales comme dans la preuve précédente. Regardons le second terme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\left|\int_\theta^{2\pi-\theta} K_n(t)\left(f(t_0-t)-\widetilde{f}(t_0)\right) dt\right| &= \frac{1}{\pi}\int_\theta^\pi K_n(t)\frac{f(t_0-t)+f(t_0+t)}{2} dt \\ &\leq \frac{\pi}{n\theta^2}\|f-\widetilde{f}(t_0)\|_1\end{aligned}$$

On choisit $\theta = n^{-\frac{1}{4}}$ de sorte que

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_\theta^{2\pi-\theta} K_n(t)\left(f(t_0-t)-\widetilde{f}(t_0)\right) dt\right| \leq \frac{\pi}{\sqrt{n}}\|f-\widetilde{f}(t_0)\|_1$$

On découpe maintenant le premier terme comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\theta K_n(t)\left(\frac{f(t_0-t)+f(t_0+t)}{2} - \widetilde{f}(t_0)\right) dt = {}& \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} K_n(t)\left(\frac{f(t_0-t)+f(t_0+t)}{2} - \widetilde{f}(t_0)\right) dt + \\ & \frac{1}{\pi}\int_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{4}}} K_n(t)\left(\frac{f(t_0-t)+f(t_0+t)}{2} - \widetilde{f}(t_0)\right) dt\end{aligned}$$

En utilisant la majoration $K_n(t) \leq n$, on a :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} K_n(t)\left|\frac{f(t_0-t)+f(t_0+t)}{2} - \widetilde{f}(t_0)\right| dt \leq \frac{1}{\pi} n\phi(\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to 0} 0$$

Enfin en utilisant la majoration $K_n(t) \leq \frac{\pi^2}{nt^2}$, puis une intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\left|\int_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{4}}} K_n(t)\left(\frac{f(t_0-t)+f(t_0+t)}{2}-\widetilde{f}(t_0)\right)dt\right| &\leq \frac{\pi}{n}\int_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{4}}}\left|\frac{f(t_0-t)+f(t_0+t)}{2}-\widetilde{f}(t_0)\right|\frac{dt}{t^2} \\
&= \frac{\pi}{n}\left[\frac{\phi(t)}{t}\right]_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{4}}}+\frac{2\pi\epsilon}{n}\int_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{4}}}\frac{\phi(t)}{t^2}dt
\end{aligned}$$

Fixons $\epsilon > 0$. Pour n assez grand, on a $\phi(t) < \epsilon$ pour $0 \leq t \leq n^{-\frac{1}{4}}$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\left|\int_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{4}}} K_n(t)\left(\frac{f(t_0-t)+f(t_0+t)}{2}-\widetilde{f}(t_0)\right)dt\right| &\leq \pi\epsilon+\frac{2\pi}{n}\int_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{4}}}\frac{dt}{t^2} \\
&\leq 3\pi\epsilon
\end{aligned}$$

□

Remarque 3. *Sous les hypothèses du théorème précédent, on montre que* $|S_nf(t_0) - \widetilde{f}(t_0)| = o(\log n)$ *en adaptant la preuve précédente : on utlise les majorations* $|D_n(t)| \leq 2n+1$ *et* $|D_n(t)| \leq \frac{\pi}{t}$*, ainsi l'intégrale après l'intégration par partie fait alors apparaitre un terme en* $\log n$.

4 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

On s'intéresse dans cette partie à l'ordre de grandeur des coefficients de Fourier en les termes suivants :

1. Que dire en général de la vitesse de convergence des coefficients de Fourier ?
2. Que peut on dire de l'image de l'application F du théorème 2 ?
3. Quels sont les liens entre la régularité de f et la vitesse de convergence de ses coefficients de Fourier ?

4.1 Les coefficients de Fourier convergent arbitrairement lentement

Lemme 1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite positive décroissante dont la série associée est convergente, alors*

$$nu_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Théorème 8. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissant vers* 0 *et convexe, i.e.* $a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n \geq 0$ *pour* $n > 0$*, que l'on prolonge par parité sur* $\mathbb{Z}$*. Alors il existe* $f \in L^1_{2\pi}$ *telle que* $c_n(f) = a_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve : Par convexité la suite $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus elle est positive et la série de terme général $a_n - a_{n+1}$ est convergente. D'après le lemme précédent $n(a_{n+1} - a_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ et donc

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1}) \xrightarrow{N\to+\infty} a_0$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)K_n$ converge donc dans $L^1_{2\pi}$ et notons f sa limite. Remarquez que $f \geq 0$. Calculons le k^{eme} coefficient de Fourier de f :

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)c_k(K_n) \\ &= \sum_{n=|k|}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)(1-\frac{|k|}{n}) \\ &= a_{|k|} \end{aligned}$$

□

On en déduit que pour toute suite $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs convergeant vers 0, il existe une fonction $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $|c_{|k|}|(f) \leq \epsilon_k$. Pour cela il suffit d'après le théorème précédent de construire une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante convexe telle $a_k \leq \epsilon_k$ pour tout entier k. DESSIN.

4.2 Quelles sont les suites s'écrivant comme coefficients de Fourier d'une fonction L^1

Théorème 9. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $c_n(f) = -c_{-n}(f) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} c_n(f) < +\infty$$

Par conséquent les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ impaires positives dont la série $\sum_{n\neq 0} \frac{a_n}{n}$ diverge ne sont pas réalisées comme coefficients de Fourier d'une fonction de $L^1_{2\pi}$. Par exemple $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(nt)}{\log n}$ n'est pas une série de Fourier, car $\sum_{n>0} \frac{1}{n\log n} = +\infty$. Par contre d'après le théorème 8 ($(\frac{1}{\log n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe), la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(nt)}{\log n}$ est une série de Fourier.

Preuve : Posons $F(t) := \int_0^t f(s)ds$. On a vu que $c_n(F) = \frac{c_n(f)}{in}$. La fonction F étant continue, la série de Féjer $(K_n * F(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(0)$. Or on a :

$$\begin{aligned} K_n * F(0) &= \sum_{|k|<n} \left(1-\frac{|k|}{n}\right) c_k(F) \\ &= c_0(F) - 2i \sum_{0<k<n} \left(1-\frac{|k|}{n}\right) \frac{c_k(f)}{k} \end{aligned}$$

En passant à la limite en n, on obtient par convergence monotone :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{c_k(f)}{k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{0<k<n} \left(1-\frac{|k|}{n}\right) \frac{c_k(f)}{k} = \frac{i(F(0)-c_0(F))}{2} < +\infty$$

□

4.3 Régularité et vitesse de convergence des coefficients de Fourier

4.3.1 Fonctions $\mathcal{C}^k$

Théorème 10. *Soit $f \in \mathcal{C}^k_{2\pi}$, alors pour tout entier $n \neq 0$*

$$c_n(f) \leq \min_{k=0,\dots,n} \frac{\|f^{(k)}\|_1}{n^k}$$

Réciproquement, on a :

Théorème 11. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $c_n(f) = O(\frac{1}{n^k})$ alors $f \in \mathcal{C}^{k-2}$.*

Ce résultat est optimal dans le sens où il existe des fonctions de $L^1_{2\pi}$ non continues telles que $c_n(f) = O(\frac{1}{n})$. Remarquez aussi que le résultat est faux si on suppose f seulement $\mathcal{C}^k$ par morceaux. L'exemple suivant permet d'illustrer les deux observations précédentes. La fonction 2π périodique h égale à $x - \pi$ sur $[0, 2\pi]$ vérifie $c_n(h) = \frac{(-1)^{n+1}}{in}$.

On peut cependant caractériser les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de la façon suivante : f est $\mathcal{C}^\infty$ ssi $c_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$ pour tout entier k.

4.3.2 Fonctions analytiques

Théorème 12. *$f \in L^1_{2\pi}$ est analytique ssi il existe $K > 0$ et $a > 0$ tels que $c_n(f) \leq Ke^{-a|n|}$ pour tout entier n.*

4.3.3 Fonctions à variations bornées

Définition 5. *Une fonction $f \in L^\infty([a, b])$ est dite à variation bornée si*

$$V(f) := \sup\{\sum_{j=0}^{N} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|,\ x_0 = a < x_1 < \dots x_{N+1} = b\} < +\infty$$

Lemme 2. *Les fonctions à variations bornées sont les fonctions s'écrivant comme différence de deux fonctions croissantes. En particulier toute fonction à variations bornées admet des limites à gauche et à droite.*

On peut aussi montrer que les fonctions à variations bornées sont dérivables presque partout. Remarquez aussi que les fonctions absolument continues sont à variations bornées mais l'inverse est clairemetn faux.

Théorème 13. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ une fonction à variation bornées sur $[0, 2\pi]$ alors*

$$|c_n(f)| \leq \frac{V(f_{/[0,2\pi]})}{2|n|}$$

Preuve : Par le changement de variable $t \mapsto t + \frac{k\pi}{n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t + \frac{k\pi}{n}) e^{-int+\pi} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} (-1)^k \int_0^{2\pi} f(t + \frac{k\pi}{n}) e^{-int} dt \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{4\pi|n|}\sum_{l=0}^{n-1}\int_0^{2\pi}\left(f(t+\frac{2l\pi}{n})-f(t+\frac{(2l+1)\pi}{n})\right)e^{-int}dt \\
|c_n(f)| &\leq \frac{V(f_{/[0,2\pi]})}{2|n|}
\end{aligned}$$

□

4.3.4 Fonctions lipschitziennes

Théorème 14. *Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$ et tout entier $n \neq 0$,*

$$c_n(f) \leq \frac{1}{4\pi}\|f(.)-f(.+\frac{\pi}{|n|})\|_1$$

PREUVE :

Par le changement de variable $t \mapsto t+\frac{\pi}{n}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+\frac{\pi}{n})e^{-int-\pi}dt \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+\frac{\pi}{n})e^{-int}dt
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t)-f(t+\frac{\pi}{n})\right)e^{-int}dt \\
|c_n(f)| &\leq \frac{1}{4\pi}\|f(.)-f(.+\frac{\pi}{|n|})\|_1
\end{aligned}$$

□

Remarque 4. *Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^1_{2\pi}$ (conséquence de Urysohn ou approximation de l'unité), on peut montrer que $\|f(.)-f(.+h)\|_1 \xrightarrow{h\to 0} 0$. Ceci conjugué au théorème élémentaire précédent permet de retrouver le théorème de Riemann-Lebesgue. Certains ouvrages suivent cette démarche.*

On déduit immédiatement du théorème précédent le suivant :

Théorème 15. *Soit $f \in Lip^\alpha_{2\pi}$, alors*

$$c_n(f) = o(n^{-\alpha})$$

Cette estimation de la vitesse de convergence est optimal : on montre en effet facilement que la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\cos(3^n t)}{3^{n\alpha}}$ est α-lipschitzienne.

Remarque 5. *Il n'est pas difficile de montrer que si $c_n(f) = O(\frac{1}{n^{1+\alpha}})$ alors $f \in Lip^\alpha_{2\pi}$ pour $0 < \alpha \leq 1$.*

5 Théorie L^2

L'espace $L^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $< f,g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. Notons $\phi_n \in L^1_{2\pi}$ la fonction $\phi_n(t) := e^{int}$.

Théorème 16. *La famille $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est orthonormale et totale.*

Corollaire 2.
- *$S_n f$ est la projection orthogonale de f sur $Vect(\phi_1, ..., \phi_n)$;*
- *$(S_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2_{2\pi}$;*
- *$< f,g >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$;*
- *l'application de $(L^2_{2\pi}, \|\|_2)$ dans $(l^2(\mathbb{Z}), \|\|_2)$, qui à f associe ses coeficients de Fourier $((c_n f))_{n\in\mathbb{N}}$, est une isométrie.*

On termine par quelques mots sur le cas L^p.

Théorème 17. *Soit $f \in L^p_{2\pi}$ avec $1 < p \le 2$, alors $\sum_n |c_n(f)|^{\frac{p}{p-1}} < +\infty$.*

Ce résultat est optimal : il existe des fonctions continues 2π périodiques telles que $\sum_n |c_n(f)|^{2-\epsilon} = +\infty$ pour tout $\epsilon > 0$.

Théorème 18. *Soit $f \in L^p_{2\pi}$ avec $1 < p \le 2$, alors $S_n f \xrightarrow{n\to+\infty} f$ dans $L^p_{2\pi}$.*

Le théorème est faux pour $p = 1$ d'après théorème de Banach-Steinhaus que nous rappelons maintenant :

Théorème 19. *Soient $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues entre deux espaces de Banach E et F, alors*

ou bien $\sup_{i\in I} |||T_i||| < +\infty$;
ou bien il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense U tel que :

$$\forall x \in U,\ \sup_{i\in I} \|T_i x\| = +\infty$$

En effet l'opérateur linéaire $S_n : L^1_{2\pi} \to L^1_{2\pi}$ qui à f associe sa n^{eme} série de Fourier $S_n f$ est continue et par convolution avec une approximation de l'unité on a $|||S_n||| = \|D_n\|_1 \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$.

6 Série absolument convergente

$$A_{2\pi} := \{f \in L^1_{2\pi},\ \|f\|_A := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\}$$

La série de fourier d'une fonction f de $A_{2\pi}$ est absolument convergente dans $(\mathcal{C}(T), \|\|_\infty)$. Notons g la limite continue de $S_n f$. On a $c_n(g) = c_n(S_m f) + c_n(g - S_m f)$. Or $|c_n(g - S_m f)| \le \|g - S_m f\|_\infty \xrightarrow{m\to+\infty} 0$ et $c_n(S_m f) = c_n(f)$ pour $m \ge |n|$. On en déduit que f et g ont même coefficient de Fourier et sont donc égales p.p. d'après le théorème d'injection (Corollaire 1).

Théorème 20. *Si $f, g \in A_{2\pi}$, alors $fg \in A_{2\pi}$ et*

$$\|fg\|_A \le \|f\|_A \|g\|_A$$

Preuve :

$$f(t)g(t) \quad = \quad \sum_k \left(\sum_n c_k(f)c_n(g)e^{i(k+n)t} \right)$$

La double somme étant normalement convergente on peut faire le changement de variable $l = n + k$ dans la deuxième somme :

$$f(t)g(t) \quad = \quad \sum_k \left(\sum_l c_k(f)c_{l-k}(g)e^{ilt} \right) \tag{1}$$

Puis par normale convergence de la double somme et par Fubini, la série de terme général $(\sum_k c_k(f)c_{l-k}(g))_l$ est absolument convergente et on peut intervertir les sommes dans (1) :

$$f(t)g(t) \quad = \quad \sum_l \left(\sum_k c_k(f)c_{l-k}(g) \right) e^{ilt}$$

La convergence étant encore normale, on a $c_l(fg) = (\sum_k c_k(f)c_{l-k}(g))_l$ pour tout l et $fg \in A_{2\pi}$ et

$$\begin{aligned} \|fg\|_A &= \sum_l \left| \sum_k c_k(f)c_{l-k}(g) \right| \\ &\leq \sum_l \sum_k |c_k(f)c_{l-k}(g)| \\ &\leq \|f\|_A \|g\|_A \end{aligned}$$

□

La série de Fourier d'une fonction f de $A_{2\pi}$ converge uniformément vers f, mais en général la convergence est arbitrairement lente.

Théorème 21. *Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels convergeant vers 0. Il existe $g \in A_{2\pi}$ telle que*

$$\|S_n g - g\|_\infty \geq \epsilon_n$$

Preuve : Il suffit de poser $g := \sum_n a_n e^{int}$ avec $a_n = \epsilon_n - \epsilon_{n-1}$ pour $n > 0$, $a_0 = \epsilon_0$ et $a_n = 0$ pour $n < 0$. On a en effet alors $g \in A_{2\pi}$ et $S_n g(0) - g(0) = \epsilon_n$. □

On a vu que si f était de classe $\mathcal{C}^2$ alors $c_n(f) = O(\frac{1}{n^2})$ et donc $f \in A_{2\pi}$. En fait on a beaucoup mieux :

Théorème 22. *$(Lip^\alpha_{2\pi}, \|\|_{Lip_\alpha})$ s'injecte continument dans $(A_{2\pi}, \|\|_A)$ pour $\alpha > \frac{1}{2}$, i.e. il existe $c_\alpha > 0$ telle que pour tout $f \in Lip^\alpha_{2\pi}$,*

$$\|f\|_A \leq c_\alpha \|f\|_{Lip_\alpha}$$

PREUVE : Posons $h = \frac{2\pi}{32^m}$. Pour $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$, on a $|e^{inh} - 1| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{2^m \leq |n| \leq 2^{m+1}} |c_n(f)|^2 &\leq \sum_{2^m \leq |n| \leq 2^{m+1}} |e^{inh} - 1|^2 |c_n(f)|^2 \\
&\leq \|f(.+h) - f\|_2^2 \\
&\leq \|f(.+h) - f\|_\infty^2 \\
&\leq \left(\frac{2\pi}{32^m}\right)^{2\alpha} \|f\|_{Lip_\alpha}^2
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\sum_{2^m \leq |n| \leq 2^{m+1}} |c_n(f)| \leq 2^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{2\pi}{32^m}\right)^{\alpha} \|f\|_{Lip_\alpha}$$

Or pour $\alpha > \frac{1}{2}$ la série $\sum_m \frac{1}{2^{m(\alpha - \frac{1}{2})}}$ est convergente et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |c_k(f)| \leq \sqrt{2} \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\alpha} \left(\sum_m \frac{1}{2^{m(\alpha - \frac{1}{2})}}\right) \|f\|_{Lip_\alpha}$$

□

Remarque 6. $\alpha = \frac{1}{2}$ *est optimal : il existe des fonctions* $\frac{1}{2}$*-Lipschitzienne qui n'appartiennent pas à* $A_{2\pi}$.

Remarque 7. *Si* f *est* α*-Lipschitzienne et à variations bornées, alors* $f \in A_{2\pi}$.

Théorème 23. *Si* $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ *vérifie* $c_n(f) \geq 0$ *pour tout entier* n*, alors* $f \in A_{2\pi}$.

Théorème 24. *Si* $f, g \in L^2_{2\pi}$*, alors* $fg \in A_{2\pi}$.

Théorème 25. *Soit* $f \in A_{2\pi}$ *ne s'annulant pas alors* $1/f \in A_{2\pi}$.

PREUVE : L'énoncé est immédiat pour $f \in \mathcal{C}^2$, les fonctions $\mathcal{C}^2$ étant dans $A_{2\pi}$. Pour montrer que f est inversible dans $A_{2\pi}$ on approche f par une fonction $\mathcal{C}^2$ ne s'annulant pas telle que $\| \left(\frac{f-g}{g}\right)^n \| < 1$ pour n grand. Alors $Id + \frac{f-g}{g}$ est inversible dans $A_{2\pi}$ et donc $f = g(Id + \frac{f-g}{g})$ l'est aussi.

Clairement on peut supposer $f \geq 1$. Par densité des polynômes dans $A_{2\pi}$ il existe un polynôme trigonométrique g tel que $\|f - g\|_A \leq \frac{1}{4}$, en particulier $\|g\|_\infty \geq \frac{1}{2}$. On va montrer que $(\frac{f-g}{g})^n$ tends vers 0 dans $A_{2\pi}$ quand n tends vers l'infini. Par multiplicativité de la norme on a

$$\begin{aligned}
\| \left(\frac{f-g}{g}\right)^n \|_A &\leq \|(f-g)^n\|_A \|\frac{1}{g^n}\|_A \\
&\leq \|f-g\|_A^n \|\frac{1}{g^n}\|_A \\
&\leq \frac{1}{3^n} \|\frac{1}{g^n}\|_A
\end{aligned}$$

Maintenant on utilise l'estimée du théorème 22 pour borner $\|\frac{1}{g^n}\|_A$ avec $\alpha = 1$. Pour une fonction $\mathcal{C}^1$ on a alors $\|f\|_{Lip_1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et donc

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{g^n}\|_A &\leq c_1 \left(\|\frac{1}{g^n}\|_\infty + \| \left(\frac{1}{g^n}\right)' \|_\infty \right) \\
&\leq c_1 \left(\|\frac{1}{g^n}\|_\infty + n \|\frac{g'}{g^{n+1}}\|_\infty \right) \\
&\leq \frac{c_1}{3^n}(1 + \frac{n}{3}\|g'\|_\infty)
\end{aligned}$$

□

Remarque 8. *Plus généralement si F est une fonction analytique au voisinage de $f([0, 2\pi])$ alors $F \circ f \in A_{2\pi}$.*

7 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

7.1 Théorème taubérien de Hardy

Théorème 26. *Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, posons*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

et

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k$$

Si $a_n = O(\frac{1}{n})$ et si $\sigma_n \xrightarrow{n \to +\infty} l \in \mathbb{C} \cup \infty$, alors $S_n \xrightarrow{n \to +\infty} l$.

L'hypothèse $a_n = O(\frac{1}{n})$ est importante : remarquez par exemple que le théorème est faux pour $a_n = (-1)^n$.

Preuve : Fixons $\alpha > 1$.

$$\begin{aligned}
[\alpha n]\sigma_{[\alpha n]} - n\sigma_n &= S_{[\alpha n]-1} + ... + S_n \\
&= ([\alpha n] - n)\, S_n + \sum_{j=n+1}^{[\alpha n]-1} ([\alpha n] - j)\, a_j
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left| S_n - \frac{[\alpha n]}{[\alpha n] - n}\sigma_{[\alpha n]} + \frac{n}{[\alpha n] - n}\sigma_n \right| &\leq C\frac{[\alpha n] - n}{n} \\
\limsup_{n \to +\infty} |S_n - l| &\leq C(\alpha - 1)
\end{aligned}$$

On conclut an faisant tendre α vers 1.

□

Corollaire 3. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $c_n(f) = O(\frac{1}{n})$, alors $S_nf(t)$ et $\sigma_nf(t)$ converge pour les mêmes valeurs de t. De plus si σ_nf converge uniformément sur un ensemble alors il en est de même de S_nf.*

Corollaire 4. *Si $f \in L^1_{2\pi}$ est à variations bornées, alors $(S_nf(t))_n$ converge vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La convergence est de plus uniforme sur les compacts inclus dans l'ensemble des points de continuités de f.*

Proposition 5. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et supposons que $\int_{-1}^1 \left|\frac{f(t_0+t)-a}{t}\right| dt < +\infty$, alors*

$$S_nf(t_0) \xrightarrow{n\to+\infty} a$$

Preuve : On est facilement ramené au cas $t_0 = 0$ et $a = 0$.

$$\begin{aligned} S_nf(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(t)\cos(\frac{t}{2})\sin(nt)}{\sin(\frac{t}{2})}dt \end{aligned}$$

Les deux termes du membre de droite convergent vers 0 d'après le lemme de Riemann-Lebesgue (En effet l'hypothèse $\int_{-1}^1 \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < +\infty$ entraîne $\frac{f(t)\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}dt \in L^1_{2\pi}$). □

Théorème 27. *(Localisation de la convergence) Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $f = 0$ sur un ouvert I. Alors $(S_nf)_n$ converge uniformément vers 0 sur tout compact $J \subset\subset I$.*

Preuve : L'application $\phi : I \to L^1_{2\pi}$ définie par

$$\phi(t_0) := \frac{f(t_0 + .)\cos(./2)}{\sin(./2)}$$

est continue puisque $f \in L^1_{2\pi}$ s'annule sur I ouvert. En particulier $\phi(J)$ est compact et on peut donc appliquer le théorème de Riemann-Lebesgue uniforme dans la preuve du théorème précédent. □

Phénomène de Gibbs

7.2 Convergence ponctuelle pour les fonctions $L^p_{2\pi}$

Théorème 28. *(Carleson,Hunt) Soit $f \in L^p_{2\pi}$ avec $1 < p \leq 2$ alors S_nf converge p.p. vers f.*

Théorème 29. *(Kolmogorov) Il existe $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $(S_nf)_n$ diverge p.p.*

7.3 Divergence pour les fonctions $\mathcal{C}^0_{2\pi}$

Vu que $\mathcal{C}^0_{2\pi} \subset L^2_{2\pi}$, la série de Fourier d'un fonction continue converge presque partout d'après le théorème de Carleson.

Théorème 30. *(Katznelson,Kahane) Soit $E \subset [0, 2\pi]$ un ensemble mesurable de mesure de Lebesgue nulle, alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ telle que la série de Fourier de f diverge exactement sur E.*

Nous allons modestement montrer qu'il existe une fonction continue divergeant sur un ensemble dénombrable. Nous montrons tout d'abord le théorème suivant :

Théorème 31. *Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ telle que $(S_n f(0))_n$ diverge.*

On propose deux preuves une preuve générique et une preuve constructive. Commençons par la preuve générique qui s'appuie sur le théorème de Banach-Steinhaus

Preuve : **Première Etape :** On construit pour tout entier k un polynôme trigonométrique H_k tel que $\|H_k\|_\infty \leq 1$ et $|S_{n_k}(H_k, 0)| \geq 2^{2^k}$ pour un entier n_k, $|n_k| \leq deg(H_k)$.

Considérons la fonction $\psi_n := signe(D_n) \in L^1_{2\pi}$. On a

$$\begin{aligned} S_n\psi_n(0) &= \psi_n * D_n(0) \\ &= \int_0^{2\pi} \psi_n(t) D_n(t) dt \\ &= \|D_n\|_1 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Féjer, on peut approcher ψ_n par un polynôme trigonométrique p_n tel que $\|p_n - \psi_n\|_1 \leq \frac{1}{2n+1}$. Puisque ψ_n est à valeurs dans $[-1, 1]$, la fonction $q_n = \max(\min(g_n, 1), -1)$ vérifie aussi $\|q_n - \psi_n\|_1 \leq \frac{1}{2n+1}$. Puis toujours d'après le théorème de Féjer on peut apprcher la fonction continue q_n par un polynôme trigonométrique g_n pour la norme sup comme suit $\|g_n - q_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n+1}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} |S_n g_n(0) - S_n\psi_n(0)| &\leq \|D_n\|_\infty \|g_n - \psi_n\|_1 \\ &\leq (2n+1)(\|g_n - q_n\|_\infty + \|q_n - \psi_n\|_1) \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $S_n(g_n, 0) \geq \|D_n\|_1 - 2$.

A k fixé, il suffit d'après l'étape précédente de prendre $H_k = \frac{g_n}{2}$ pour n assez grand.

Deuxième Etape : Construction de la fonction "pathologique" f.

Pour tout entier k, on pose $p(k) := \sum_{j=1}^{k} (deg(H_{j-1}) + deg(H_j) + 1)$ et on considère la suite de polynômes trigonométriques $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_m(t) := \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} e^{ip(k)t} H_k(t)$$

Puisque $\|H_k\|_\infty \leq 1$, la série définissant f_m converge normalement et donc $(f_m)_m$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Troisième Etape : Calcul de la série de Fourier de f en 0.

Puique la suite $(f_m)_m$ converge uniformément vers f, on a $c_n(f_m) \xrightarrow{m \to +\infty} c_n(f)$ pour tout entier n. Or pour $k \leq m$ et $|u| \leq deg(H_k)$, on a $c_{p(k)+u}(f_m) = 2^{-k} c_u(H_k)$. Donc

$$
\begin{aligned}
\left(S_{p(k)+n_k} f - S_{p(k)-n_k} f\right)(0) &= 2^{-k} S_{n_k} H_k(0) \\
\left|S_{p(k)+n_k} f(0) - S_{p(k)-n_k} f(0)\right| &\geq 2^{-k} 2^{2^k} \\
&\xrightarrow{k \to +\infty} +\infty
\end{aligned}
$$

Il s'en suit que la série de Fourier en 0 de f n'est pas de Cauchy donc diverge. $\square$