Théorème de Stone-Weierstrass et Applications

David Burguet

15 septembre 2010

Table des matières

1 Preuves du théorème de Weierstrass

Théorème 1. *(Weierstrass) Les fonctions polynômiales sont denses dans* $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\|_\infty)$.

1.1 Polynômes de Bernstein

Définition 1. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. *On note* $B_n(.,f)$ *le* n^{eme} *polynôme de Bernstein de* f *défini par*

$$B_n(X,f) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k X^k (1-X)^{n-k}$$

Calculons tout d'abord $B_n(.,1)$, $B_n(.,x \mapsto x)$ et $B_n(.,x \mapsto x^2)$:

$$B_n(.,1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = (X+(1-X))^n = 1$$

$$\begin{aligned} B_n(.,x \mapsto x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\ &= X\left(\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} X^{k-1}(1-X)^{n-k}\right) = X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n(.,x \mapsto x^2) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\ &= X\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_{n-1}^{k-1} X^{k-1}(1-X)^{n-k}\right) \\ &= \frac{(n-1)X^2}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} C_{n-1}^{k-2} X^{k-2}(1-X)^{n-k}\right) + \frac{X}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} X^{k-1}(1-X)^{n-k}\right) \\ &= \frac{1}{n}((n-1)X^2 + X) \end{aligned}$$

Lemme 1.

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nX)^2 C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$$

PREUVE :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (k-nX)^2 C_n^k X^k (1-X)^{n-k} &= n^2(X^2 B_n(.,1) - 2XB_n(.,x \mapsto x) + B_n(.,x \mapsto x^2)) \\ &= n^2(X^2 - 2X(X) + \frac{1}{n}((n-1)X^2 + X)) \\ &= nX(1-X) \end{aligned}$$

□

Définition 2. *Soient* (X, d_x) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une application. Le module de continuité de* f *à l'échelle* δ *noté* $\omega(f, \delta)$ *est défini comme suit :*

$$\omega(f, \delta) := \sup_{d_X(x,y)<\delta} d_Y(f(x), f(y))$$

Remarquez que f est uniformément continue ssi $\lim_{\delta \to 0} \omega(f, \delta) = 0$.

Théorème 2. *Soit* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *une fonction continue. Alors la suite de fonctions polynômiales* $(B_n(., f))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformémement vers* f.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. On a pour tout $\delta > 0$ et $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
|B_n(x, f) - f(x)| &= |B_n(x, f) - f(x)B_n(x, 1)| \\
&\leq \sum_{|\frac{k}{n}-x|<\delta} C_n^k x^k(1 - x)^{n-k}|f(\frac{k}{n}) - f(x)| + \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} C_n^k x^k(1 - x)^{n-k}|f(\frac{k}{n}) - f(x)|
\end{aligned}$$

La première somme du terme de droite est majoré par :

$$\sum_{|\frac{k}{n}-x|<\delta} C_n^k x^k(1 - x)^{n-k}|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leq \omega(f, \delta)$$

et la seconde par :

$$\sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} C_n^k x^k(1 - x)^{n-k}|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{\delta^2}\left(\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n} - x)^2 C_n^k x^k(1 - x)^{n-k}\right)$$

et donc d'après le lemme 1 et puisque $\max_{x\in[0,1]} x(1 - x) = \frac{1}{4}$:

$$\sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} C_n^k x^k(1 - x)^{n-k}|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{n\delta^2}x(1 - x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

On choisit δ tel que $\omega(f, \delta) < \frac{\epsilon}{2}$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\|f\|_\infty}{2N\delta^2} < \frac{\epsilon}{2}$. Alors pour $n > N$, on a $\|B_n(., f) - f\|_\infty < \epsilon$. □

La preuve du théorème de Weierstrass peut se généraliser en dimension $d \geq 1$ en considérant les polynômes de Bernstein généralisés :

$$B_n(X_1, ..., X_d, f) := \sum_{0\leq k_1,...,k_d\leq n} \prod_{i=1}^{d} C_n^{k_i} X_i^{k_i}(1 - X_i)_i^k f(\frac{k_1}{n}, ..., \frac{k_d}{n})$$

1.2 Preuve Probabiliste

Soit $x \in X$ et soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre x, c'est à dire :

$$P(X_i = 1) = x$$
$$P(X_i = 0) = 1 - x$$

Remarquez que $E(X_i) = x$ et $Var(X_i) = x(1 - x)$.

Notons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. La variable aléatoire S_n suit une loi binômiale de paramètre x, c'est à dire

$$\forall 0 \leq k \leq n,\ P(S_n = k) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Remarquez que $E(S_n) = nx$ et $Var(S_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = nx(1-x)$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebechev, on a alors :

$$P(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta) \leq \frac{1}{n\delta^2} x(1-x)$$

Soit f une fonction continue, notons f_n la fonction $E(f(\frac{S_n}{n})) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n}) = B_n(x, f)$. On a pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\infty &\leq \int_{|\frac{S_n}{n} - x| > \delta} \left| f\left(\frac{S_n(w)}{n}\right) - f(x) \right| dP(w) + \omega(f, \delta) \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} + \omega(f, \delta) \end{aligned}$$

On conclut comme dans le paragraphe précédent.

1.3 Convolution

Proposition 1. *La suite $(\rho_n)_n$ de fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\psi_n(x) := \prod_{i=1}^d (1 - x_i^2)^n 1_{[-1,1]^d}$$

$$\rho_n := \frac{\psi_n}{\int \psi_n}$$

est une approximation de l'unité.

Preuve :

Remarquez tout d'abord que :

$$\begin{aligned} \int \psi_n &\geq \int_{[-1,1]^d} \prod_{i=1}^d (1 - |x_i|)^n dx_i \\ &\geq \left(2 \int_{[0,1]} x^n dx \right)^d \\ &\geq \frac{2^d}{(n+1)^d} \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha > 0$, on a ensuite :

$$\begin{aligned} \int_{\|x\|_\infty \geq \alpha} \rho_n &\leq \frac{1}{\int \rho_n} \left(1 - \min(\alpha, 1)^2\right)^n \\ &\leq \frac{(n+1)^d \left(1 - \min(\alpha, 1)^2\right)^n}{2^d} \\ &\xrightarrow{n \to +\infty} 0 \end{aligned}$$

$\square$

Soit $K \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^d$ un compact et soit $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ (le cas général se ramène facilement au cas $K \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^d$ par homothétie). D'après le théorème d'Urysohn, on prolonge f en une fonction encore notée $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui s'annule en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$. Le produit de convolution $f * \rho_n$ est ainsi bien défini. De plus pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$, on a :

$$\begin{aligned} f * \rho_n(x) &= \int f(y)\rho_n(x-y)dy \\ &= \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} f(y) \prod_{i=1}^{d} (1-(x_i-y_i)^2)^n dy \end{aligned}$$

On en déduit que $(f * \rho_n)_{/[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d}$ est une fonction polynômiale. De plus la suite $(\rho_n)_n$ étant une approximation de l'unité formée de fonctions continues à support compact, $f * \rho_n$ converge uniformément vers f.

1.4 Polynômes trigonométriques

Nous verrons dans le cours sur les séries de Fourier que les polynômes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues 2π périodiques (Théorème de Fejer). Puisque la fonction $x \mapsto e^{2i\pi x}$ est approché unifomément sur $[0, 2\pi]$ par ses polynômes de Lagrange, on en déduit de nouveau la densité des polynômes dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$. En fait le théorème de Féjer est équivalent au théorème de Weierstrass.

2 Théorème de Stone-Weierstrass

Dans la suite (K, d) désigne un espace métrique compact de cardinal > 1.

Définition 3. $S \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *est un treillis si*

$$\forall f, g \in S,\ \min(f,g), \max(f,g) \in S$$

Définition 4. $S \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *sépare les points si*

$$\forall x, y \in K\ \exists g \in S \text{ tel que } g(x) \neq g(y)$$

$S \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *sépare fortement les points si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in K\ \exists g \in S \text{ tel que } g(x) = \alpha \text{ et } g(y) = \beta$$

Théorème 3. *Soit S un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ contenant les constantes, alors S sépare les points ssi S sépare fortement les points.*

PREUVE : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in K$. Puisque S sépare les points il existe $f \in S$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Dans $\mathbb{R}^2$ la famille formé par les vecteurs $(f(x), f(y))$ et $(1,1)$ est libre, il existe donc $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $u(f(x), f(y)) + v(1,1) = (\alpha, \beta)$. La fonction $g = uf + v \in S$ car S est un espace vectoriel contenant les constantes et $g(x) = \alpha$, $g(y) = \beta$. □

Théorème 4. *Si S est un treillis, alors S sépare fortement les points de K ssi S est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.*

PREUVE : Nous allons montrer l'implication $\Rightarrow$ et laissons l'autre au lecteur. On considère donc un treillis S séparant fortement les points de K. Soit $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Pout tout $x, y \in K$ il existe $g_{x,y} \in S$ tel que $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$. Fixons x et considérons pour tout $y \in K$ le voisinage ouvert de y défini par $O_{x,y} = \{z,\ g_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon\}$. Par compacité de K, il existe $y_1, ..., y_N \in K$ tels que $\cup_{i=1,...,N} O_{x,y_i} = K$. Posons alors $g_x = \min_{i=1,...,N} g_{x,y_i}$. Puisque S est un treillis, $g_x \in S$. De plus $g_x < f + \epsilon$ et $g_x(x) = f(x)$. On considère alors le voisinage ouvert de x défini par $O_x = \{z,\ g_x(z) > f(z) - \epsilon\}$. Par compacité de K, il existe $x_1, ..., x_M \in K$ tels que $\cup_{i=1,...,M} O_{x_i} = K$. Posons alors $g = \max_{i=1,...,N} g_{x_i}$. Puisque S est un treillis, $g_x \in S$. Enfin on vérifie facilement que $\|f - g\|_\infty < \epsilon$. $\square$

Lemme 2. *La fonction $x \mapsto |x|$ de $[-1,1]$ dans $[0,1]$ est limite uniforme de polynômes s'annulant en 0.*

PREUVE : La suite de polynômes P_n défini par récurrence comme $P_0 = 0$ et $P_{n+1} = P_n + \frac{x^2 - P_n^2}{2}$ est croissante. On vérifie en effet facilement que $0 \leq P_n(x) \leq |x|$ en raisonnant aussi par récurrence et en utilisant la relation $|x| - P_{n+1}(x) = (|x| - P_n)(1 + \frac{|x| + P_n}{2})$. Clairement $(P_n)_n$ converge simplement vers $x \mapsto |x|$, qui est continue. D'après le théorème de Dini cette suite converge donc uniformément. $\square$

Théorème 5. *Si $S \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel fermé pour la convergence uniforme, alors S est une $\mathbb{R}$ algèbre ssi S est un treillis.*

PREUVE : Soit $S \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ une $\mathbb{R}$ algèbre unitaire fermée pour la convergence uniforme, prouvons que S est un treillis. Soient $f, g \in S$, nous allons montrer que $\min(f,g), \max(f,g) \in S$. Clairement on peut supposer que $|f|, |g| < \frac{1}{2}$ et donc $|f - g| < 1$.

$$\max(f,g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} \tag{1}$$

$$\min(f,g) = \frac{f + g - |f - g|}{2} \tag{2}$$

D'après le lemme précédent, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ avec $P_n(0) = 0$ convergeant uniformément sur $[-1,1]$ vers $x \mapsto |x|$. On en déduit que $P_n(f - g)$ converge uniformément vers $|f - g|$. Or S étant une algèbre $P_n(f - g) \in S$ et S étant fermé $|f - g| \in S$. On conclut avec les relations (1) que $\min(f,g), \max(f,g) \in S$ et donc S est un treillis.

Réciproquement montrons que si S est un treillis et un espace vectoriel fermé pour la convergence uniforme, alors S est une algèbre. Il suffit de montrer que si $f \in S$ alors $f^2 \in S$. On note $C_f := \{\phi \in \mathcal{C}([-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty], \mathbb{R}),\ \phi \circ f \in S\}$. L'ensemble C_f hérite naturellement d'une structure de treillis fermé pour la convergence uniforme. De plus C_f contient la fonction identité qui sépare fortement les points. Il suit du théorème précédent que $C_f = \mathcal{C}([-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty], \mathbb{R})$ et contient en particulier $x \mapsto x^2$, i.e. $f^2 \in S$. $\square$

Corollaire 1. *(Théorème de Stone-Weierstrass) Soit $S \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ une $\mathbb{R}$ algèbre unitaire, alors S est dense $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ ssi S sépare les points de K.*

Corollaire 2. *(Théorème de Stone-Weierstrass complexe) Soit $S \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ une $\mathbb{C}$ algèbre unitaire autoconjuguée (i.e. $f \in S \Rightarrow \overline{f} \in S$), alors S est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ ssi S sépare les points de K.*

Exemple 1.

- Les fonctions Lipschitziennes sont denses dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|\|_\infty)$. En effet elles forment une $\mathbb{R}$ algèbre unitaire et sépare les points car pour tout $x_0, x_1 \in K$, la fonction $x \mapsto d(x, x_0)$ est Lipschitzienne et sépare x_0 et x_1 ;

– Soient X, Y deux espaces métriques compacts, alors l'espace vectoriel engendré par les fonctions produits, i.e. de la forme $f(x)g(y)$ avec $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}(X \times Y, \mathbb{R})$.

3 Un peu plus loin

3.1 Théorème de Müntz

Théorème 6. *Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres strictement positifs : $0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n < ...$ alors l'espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto t^{\lambda_i}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ssi $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_i}$ diverge.*

3.2 Théorème de Chudnovski

Théorème 7. *Pour tout $\frac{1}{2} \geq \alpha > 0$, l'ensemble $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers est dense dans $(\mathcal{C}([\alpha, 1-\alpha]), \|\|_\infty)$.*

Preuve :

Montrons tout d'abord que l'on peut approcher uniformément toute constante par un polynôme à coefficients entiers, c'est à dire $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Z}[X]}$. Les dyadiques étant dense dans $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que $\frac{1}{2}$ est limite uniforme d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$. On considère la suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ définie par récurrence :

$$P_0 = X$$
$$P_{n+1} := 2(1 - P_n)P_n$$

On a

$$\begin{aligned}
\|P_{n+1} - \frac{1}{2}\|_\infty &= 2\|P_n - \frac{1}{2}\|_\infty^2 \\
&= \left(\prod_{k=0}^{n} 2^{2^k}\right) \|P_0 - \frac{1}{2}\|_\infty^{2^{n+1}} \\
&= 2^{2^{n+1}-1}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^{2^{n+1}} \\
&\xrightarrow{n\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

On conclut en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass à l'adhérence de $\mathbb{Z}[X]$ qui est donc une $\mathbb{R}$-algèbre unitaire, car elle contient $\mathbb{R}$, et séparante, car elle contient la fonction $x \mapsto x$ qui sépare trivialement tout couple de point de $[0, 1]$.

□

3.3 Densité des polynômes dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \|\|_\infty)$

Théorème 8. *Toute limite uniforme de polynômes dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \|\|_\infty)$ est un polynôme.*

Preuve :

Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction (continue) f. En particulier cette suite est de Cauchy pour la norme infinie. Il existe donc un entier N tel que pour tout $p, q \geq N$, on a $\|R_p - R_q\| < 1$ et en particulier $R_p - R_q \in \mathbb{R}$. Donc

$$f = \overbrace{R_N}^{\in\mathbb{R}[X]} + \overbrace{\lim_q R_q - R_N}^{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]$$

□

3.4 Densité des polynômes complexes dans un ouvert de $\mathbb{C}$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Les polynômes à coefficients complexes ne sont pas denses pas dans $\mathcal{C}(\omega, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme. Rappelons en effet qu'on montre au moyen de la formule de Cauchy que toute limite uniforme de fonctions holomorphes est aussi holomorphe. En particulier, $\overline{\mathbb{C}[z]} \subset \mathcal{H}(\Omega) \neq \mathcal{C}(\omega, \mathbb{C})$.

Théorème 9. *(Runge-Mergelyan) Soit K un compact de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{C} - K$ est connexe. Alors toute fonction continue sur K et holomorphe sur l'intérieur de K est limite uniforme sur K d'une suite de polynômes.*

Remarque 1. *C'est faux si l'on considère un compact K tel que $\mathbb{C} - K$ n'est pas connexe . En effet notons alors D une composante connexe bornée de $\mathbb{C} - K$ et considérons pour $\alpha \in D$ la fonction $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ qui est holomorphe sur un voisinage de K. Raisonnons par l'absurde. Il existe un polynôme P tel que*

$$|f(z) - P(z)| < \frac{1}{\max_{z\in K} |z - \alpha|}$$

Alors la fonction entière $g := (z - \alpha)P(z) - 1$ ne vérifie pas le principe du maximum sur D car

- $|g(\alpha)| = 1$;
- $|g(z)| < 1$ *pour* $z \in K \supset \partial D$.

4 Applications du théorème de Stone-Weierstrass

4.1 Séparabilité de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ avec K compact métrisable

Théorème 10. *Soit (K, d) un espace métrique compact. Alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est séparable.*

Preuve : Soit $(x_n)_n$ une partie dénombrable dense dans K. Pour tout entier n, notons $f_n : K \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = d(x, x_n)$ pour tout $x \in K$. Notons S la $\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par la fonction constante égale à 1 et par les fonctions f_n. Alors S est clairement dénombrable et sépare les points de K. D'après le théorème de Stone-Weierstrass l'adhérence de S est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. □

On peut aussi montrer ce résultat au moyen de partitions de l'unité.

4.2 Théorème des moments

Théorème 11. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$, alors $f = 0$.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty < \frac{\epsilon}{|b-a|\|f\|_\infty}$. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2 &\leq \int_a^b fP + \int_a^b f(f - P) \\ &< 0 + \epsilon \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $\int_a^b f^2 = 0$ puis $f = 0$. □

Remarquez que $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille totale dans $L^2([0,1])$ d'après le théorème de Weierstrass et par densité des fonctions continues dans L^2. En particulier le théorème s'étend au cas $f \in L^2([0,1])$. En fait il s'étend aussi au cas $f \in L^1([0,1])$. En effet si $f \in L^1([0,1])$, la transormée de Fourier de $f1_{[0,1]}$ est entière et $\widehat{f}^{(k)}(0) = \int_0^1 (it)^k f(t)dt = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en conclut que f est identiquement nulle.

4.3 Injectivité de la transformée de Laplace

Théorème 12. *(Injectivité de la transformée de Laplace) Soit $\sigma > 0$ etsoit f une fonction continue bornée de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, telle que sa transformée de Laplace vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$Lf(\sigma+n) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)e^{-(\sigma+n)t}dt = 0$$

alors $f = 0$.

Preuve : Par le changement de variable $(t \mapsto -lnu)$, on a $\int_0^1 u^{\sigma+n-1} f(-ln(u))du = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème des moments, la fonction continue $u \mapsto u^\sigma f(-\ln u)$ est identiquement nulle et par suite f aussi. $\square$

Le théorème des moments s'appliquant dans L^1, le thèorème précédent reste valable pour $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Une autre façon de montrer l'injectivité de la transformée de Laplace dans L^1 est de se ramener à l'injectivité de la transformée de Fourier de la façon suivante. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, la fonction F défini par $F = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)e^{-zx}dx$ est holomorphe sur $\{Re(z) > 0\}$ continue sur $\{Re(z) \geq 0\}$ et coincide avec la transformée de Laplace de f sur l'axe des réels et avec la fransformée de Fourier de $f1_{\mathbb{R}^+}$ sur l'axe des imaginaires pures. Donc si la fransformée de Laplace est nulle, il en est de même de F par le principe des zéros isolés et donc de la transformée de Fourier. Par injectivité de la transformée de Fourier, on conclut que $f = 0$.

4.4 Critère de Weyl

Définition 5. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ est équirépartie modulo 1 si pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$, on a*

$$\frac{1}{n+1}\sharp\{0 \leq p \leq n+1,\ u_p - [u_p] \in [a,b]\} \xrightarrow{n\to+\infty} b-a$$

Lemme 3. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 ssi pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$,*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} f(u_p - [u_p]) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)dt$$

Preuve : Montrons que si la suite $(u_n)_n$ vérifie le critère du lemme alors elle est uniformément continue. Soit $0 \leq a \leq b \leq 1$, $\epsilon > 0$ et soit $f^+ \in \mathcal{C}([0,1])$ (resp. f^-) une fonction continue (Urysohn) valant 1 sur $[a,b]$ (resp. sur $[a+\epsilon, b-\epsilon]$) et 0 en dehors $[a-\epsilon, b+\epsilon]$ (resp. $[a,b]$) telle que $\|f\|_\infty \leq 1$. Alors

$$\begin{aligned} b-a-\epsilon \leq \int f^-(t)dt \leq \liminf_n \frac{1}{n+1}\sharp\{0 \leq p \leq n+1,\ u_p - [u_p] \in [a,b]\} \leq \\ \limsup_n \frac{1}{n+1}\sharp\{0 \leq p \leq n+1,\ u_p - [u_p] \in [a,b]\} \leq \int f^+(t)dt \leq b-a+\epsilon \end{aligned}$$

Réciproquement on approche f par ses sommes de riemann :

$$S_k^+(f) = \sum_{l=0}^{k-1} 1_{]l/k,l+1/k]} \sup_{x\in]l/k,l+1/k]} f(x)$$

$$S_k^-(f) = \sum_{l=0}^{k-1} 1_{]l/k,l+1/k]} \inf_{x\in]l/k,l+1/k]} f(x)$$

on a $\|S_k^{+/-}(f)\|_\infty \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ puis on conclut en appliquant le critère d'équirépartition aux sommes de Riemann.

□

Théorème 13. *(Critère de Weyl)*
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} e^{2i\pi\lambda u_p} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Corollaire 3. *$(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 ssi α est irrationnel.*

Preuve : On applique le critère de Weyl. Si α est irrationnel, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} e^{2i\pi p\lambda\alpha} &= \frac{1-e^{2i\pi(n+1)\lambda\alpha}}{(n+1)(1-e^{2i\pi\lambda\alpha})} \\
\left|\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} e^{2i\pi p\lambda\alpha}\right| &\leq \frac{1}{(n+1)|\sin(\pi\lambda\alpha)|} \\
&\xrightarrow{n\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

Si α est rationnel, il est clair que $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas équirépartie modulo 1.

□

Remarque 2. *On peut montrer que $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$ est équidistribué modulo 1 ssi P a au moins un de ses coefficients, autre que le terme constant, qui est irrationnel.*

Corollaire 4. *Pour $\alpha \in]0,1[$ et pour $a \neq 0$, la suite $(an^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1.*

Preuve : La fonction $t \mapsto e^{2ia\pi\lambda t}$ étant $2a\pi|\lambda|$-lipschitzienne, on a :

$$\left|\int_k^{k+1} e^{2ia\pi\lambda x^\alpha}dx - e^{2ia\pi\lambda k^\alpha}\right| \leq 2a\pi|\lambda||(k+1)^\alpha - k^\alpha|$$

et donc

$$\left|\int_1^{n} e^{2ia\pi\lambda x^\alpha}dx - \sum_{k=1}^{n} e^{2ia\pi\lambda k^\alpha}\right| \leq 2a\pi|\lambda|n^\alpha \tag{3}$$

Par changement de variable puis intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^n e^{2ia\pi\lambda x^\alpha}dx &\overset{y=x^\alpha}{=} \int_1^{n^\alpha} e^{2ia\pi\lambda y}\frac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}dy \\
&\overset{IPP}{=} [\frac{1}{2ia\pi\lambda}e^{2ia\pi\lambda y}\frac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}]_1^{n^\alpha} + \int_1^{n^\alpha} \frac{1}{2ia\pi\lambda}e^{2ia\pi\lambda y}\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\alpha}-1)y^{\frac{1}{\alpha}-2}dy \\
\left|\int_1^n e^{2ia\pi\lambda x^\alpha}dx\right| &= O(n^{1-\alpha}) \qquad (4)
\end{aligned}$$

On déduit des inégalités (3) et (4) et de l'hypothèse $0 < \alpha < 1$ que la suite $(an^\alpha)_n$ vérifie le critère de Weyl. $\square$

Remarque 3. *On peut montrer que pour θ fixé avec $|\theta| > 1$ la suite $(t\theta^n)_n$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout t et que pour $t \neq 0$ fixé, la suite $(t\theta^n)_n$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout θ avec $|\theta| > 1$.*

Remarque 4. *Les suites $(u_n^+)_n = \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\right)_n$ et $(u_n^-)_n = \left((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right)_n$ ne sont pas équirépartie modulo 1. En effet ce sont des suites de Fibonacci et $u_0^+ + u_0 - = 2 \in \mathbb{N}$ et $u_1^+ + u_1 - = 1 \in \mathbb{N}$, donc $u_n^+ + u_n^- \in \mathbb{N}$ pour tout entier n. Or u_n^- tends vers 0, et donc $u_n^+ - [u_n^+]$ aussi.*