Transformée de Fourier

David Burguet

October 17, 2010

Contents

1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 1. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors la transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ est définie par :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt$$

Proposition 1. *(Propriétés algébriques)*

- $\widehat{\lambda f + g} = \lambda \hat{f} + \hat{g}$;
- $\hat{\hat{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$;
- $\widehat{f(.-a)} = e^{-ia\cdot} \hat{f}$;
- $\widehat{\lambda f(\lambda)} = \hat{f}(\frac{\cdot}{\lambda})$.

Proposition 2. *(Continuité) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est uniformément continue et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Proposition 3. *(Convolution et Fubini)*

- $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$;
- $\int f\hat{g} = \int \hat{f} g$.

Proposition 4. *(Primitive et dérivée)*

- *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que la primitive $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{F} = \frac{\hat{f}(\xi)}{i\xi}$ pour tout $\xi \neq 0$.*
- *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\hat{f}' = \widehat{-ixf}$. En particulier si f est support compact, alors $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

2 Noyau de Féjer et inversion

On note K le noyau de Féjer défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ K(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2$$

On vérifie facilement au moyen d'une intégration par partie que :

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\, e^{itx} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\, e^{-itx} dt \end{aligned}$$

autrement dit K est la tranformée de Fourier de $(1-|t|)^+ := \max(1-|t|, 0)$. Le noyau de Fejer K est la version continue du noyau de Fejer 2π périodique $K_n^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx}$.

Proposition 5. *La famille de fonctions* $(K_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^{+*}} := (\lambda K(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}^{+*}}$ *est une approximation de l'unité.*

Preuve : Remarquez tout d'abord que les K_λ sont des fonctions positives. De plus pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>\delta} K_\lambda(x)dx &= \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{|x|>\delta}\left(\frac{\sin(\lambda x/2)}{x/2}\right)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{|x|>\delta}\frac{4}{x^2}dx \\
&\leq \frac{4}{\delta\pi\lambda} \xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que $\int K = \int K_\lambda = 1$. On va pour cela se ramener au fait que $K_n^{2\pi} := \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$ est une approximation de l'unité sur le cercle. Pour tout $\delta > 0$ on a $\int K = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta} K_\lambda$. Or par continuité du sinus cardinal, il existe $\Delta > 0$ tel que pour tout $0 < \delta < \Delta$, on ait

$$\forall x \in [0,\delta],\ \mathrm{sin}_c(\frac{x}{2})^2 \geq sin_c(\frac{\delta}{2})^2$$

et donc

$$sin_c(\frac{\delta}{2})^2\int_{-\delta}^{\delta} K_n^{2\pi} \quad\leq\quad \int_{-\delta}^{\delta} K_n \leq \int_{-\delta}^{\delta} K_n^{2\pi}$$

puis en faisant tendre n vers $+\infty$ à δ fixé :

$$sin_c(\frac{\delta}{2})^2 \quad\leq\quad \lim_{n\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta} K_n \leq 1$$

puis en récapitulant

$$\begin{aligned}
\int K &= \lim_{n\to+\infty}\int K_n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta} K_n \\
&\in [sin_c(\frac{\delta}{2})^2, 1]
\end{aligned}$$

On conclut en faisant tendre δ vers 0. □

Théorème 1. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$*, alors* $K_\lambda * f$ *converge vers* f *dans* $L^1(\mathbb{R})$ *quand* λ *tends vers* $+\infty$*. De plus*

$$K_\lambda * f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

Preuve : La convergence vient du fait que $(K_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^{+*}}$ est une approximation de l'unité. Justifions maintenant la formule pour $K_\lambda * f$. On a déja observé que $K = \frac{1}{2\pi}\widehat{(1-|t|)^+}$, puis par dilatation on a $K_\lambda = \frac{1}{2\pi}\widehat{\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^+}$. Donc

$$\begin{aligned} K_\lambda * f(x) &= \int \frac{1}{2\pi}\widehat{\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^+}(u)f(x-u)du \\ &= \int \frac{1}{2\pi}\widehat{\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^+}(u)f(x+u)du \\ &= \int \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^+(u)\widehat{\tau_{-x}f}(u)du \\ &= \int \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^+(u)\hat{f}(u)e^{ixu}du \end{aligned}$$

où la seconde inégalité résulte de la parité de K_λ et la troisième de la "formule de Fubini" vu dans la première partie. $\square$

Corollaire 1. *La transfourmée de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R})$, i.e. $[\hat{f}=0] \Rightarrow [f=0]$.*

On déduit aussi du théorème précédent la formule d'inversion classique :

Corollaire 2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour pp $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$$

Preuve : Puisque $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ on peut appliquer le théorème de CV dominée dans la formule pour $K_\lambda * f$ et en déduire que $K_\lambda * f(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $\frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x)$. $\square$

Comme $\left(1-\frac{\cdot}{\lambda}\right)^+$ et sa transformée de Fourier K_λ sont dans $L^1(\mathbb{R})$. En appliquant le corollaire précédent on obtient

$$\widehat{K_\lambda} = \left(1-\frac{\cdot}{\lambda}\right)^+$$

Rappelons que le théorème de Féjer affirme que les polynômes trigonométriques (qui sont les fonctions de $L^1_{2\pi}$ dont tous les coefficients de Fourier sont nulles sauf un nombre fini) sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$. L'analoque ici est le résultat suivant :

Corollaire 3. *Les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$.*

Il suffit en effet de remarquer $\widehat{K_\lambda * f} = \widehat{K_\lambda}\hat{f} = (1-\frac{|.|}{\lambda})^+\hat{f}$ est à support compact.

Corollaire 4. *(Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}(\xi) \xrightarrow{|\xi|\to+\infty} 0$.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\|f - K_\lambda * f\|_1 < \epsilon$. Soit ξ avec $|\xi| > \lambda$ alors

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \widehat{f - K_\lambda * f}(\xi) \\ |\hat{f}(\xi)| &\leq \|f - K_\lambda * f\|_1 \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

$\square$

Remarquez que le lemme de Riemman-Lebesgue s'applique aussi dans une version uniforme : si K est un compact de L^1 alors $\hat{f}(\xi) \xrightarrow{|\xi|\to+\infty} 0$ uniformément pour $f \in K$.

On peut résumer certaines des propriétés précédentes par le théorème suivant :

Théorème 2. *L'application* $\begin{array}{cccc} F: & (L^1, \|\|_1) & \to & (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\|_\infty) \\ & f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$ *est un morphisme d'algèbre de norme* 1 *injectif mais non surjectif.*

Les seules affirmations qui n'ont pas été démontrés jusque là sont :

- F est de norme ≥ 1 ;
- F n'est pas surjective.

Le premier point résulte du fait que $\|K\|_1 = \|\hat{K}\|_\infty = 1$. Pour le second point on peut expliciter des fonctions continues tendant vers 0 en l'infini qui ne sont pas des transformées de Fourier d'une fonction de L^1 (Voir exo 8 du TD). Mais la nonsurjectivité de F peut être aussi obtenue par un argument générique au moyen du théorème de l'application ouverte. En effet si l'application F était surjective, alors d'après le théorème de l'application ouverte il existerait $c > 0$ tel que pour tout $f \in L^1$, on ait $c\|\hat{f}\|_\infty \geq \|f\|_1$. Mais pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, les fonctions $f_\lambda = \widehat{K_\lambda * 1_{[-1,1]}} = \left(1 - \frac{|.|}{\lambda}\right)^+ \sin_c(.) \in L^1(\mathbb{R})$ vérifient :

- $\|f_\lambda\|_1 \xrightarrow{\lambda\to+\infty} +\infty$ car $\sin_c \notin L^1(\mathbb{R})$;
- $\hat{f}_\lambda = 2\pi K_\lambda * 1_{[-1,1]}$ par inversion et parité de f_λ et donc $\|\hat{f}_\lambda\|_\infty \leq 2\pi\|K_\lambda\|_1\|1_{[-1,1]}\|_\infty = 2\pi$.

3 Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz

3.1 Espace de Schwartz : Définitions et Propriétés élémentaires

Définition 2. *Une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est dite à décroissance rapide (D.R.) si*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ |x^p f(x)| \xrightarrow{|x|\to+\infty} 0$$

Par exemple la fonction $e^{-|x|}$ est D.R. On vérifie facilement que les fonctions D.R. vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 6.

1. *si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est D.R. alors $x^p f \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et en particulier $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$;*
2. *si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\hat{f}$ est D.R.*

Définition 3. *On définit l'espace de Schawartz $S(\mathbb{R})$ comme suit :*

$$S(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N}\ f^{(k)}\ D.R. \right\}$$

Par exemple $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$, ainsi que toutes fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Proposition 7. *$S(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ algèbre stable par dérivation, convolution et multiplication par un polynome.*

Proposition 8. *$S(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier.*

PREUVE : Cela suit aisément des points suivants :

- $f \in S(\mathbb{R})$ entraine $\hat{f}$ est D.R. d'après le point 2. de la Proposition 6 ;
- $f \in S(\mathbb{R})$ entraine $\hat{f} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ d'après le point 1. de la Proposition 6 ;
- si $f \in S(R)$ alors $-ixf \in S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et $\left(\hat{f}\right)' = \widehat{-ixf}$.

$\square$

3.2 Topologie de l'espace de Schwartz

Définition 4. *On munit $S(\mathbb{R})$ de la métrique*

$$d(f,g) = \sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{\|x^p(f-g)^{(q)}\|_\infty}{2^{p+q}(1+\|x^p(f-g)^{(q)}\|_\infty)}$$

Ainsi une suite $(f_n)_n$ converge vers 0 dans $S(\mathbb{R})$ si pour tout entier p et q, on a $\|x^p f_n^{(q)}\|_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Remarquez aussi que si $(f_n)_n$ converge vers 0 dans $S(\mathbb{R})$ alors $(x^p f_n^{(q)})_n$ converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout entier p, q.

Proposition 9. *Les applications de $S(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$ qui à f, g associe $f+g$, fg, $f * g$ sont continues. Aussi si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors l'application de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$ qui à f associe Pf et l'application qui à f associe f' sont continues.*

Théorème 3. *La transformée de fourier de $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ est un homéo et $\mathcal{F}^2 = 2\pi\sigma$ avec $\sigma f = f(-.)$ pour tout $f \in S(\mathbb{R})$.*

PREUVE : On a déja vu que $S(\mathbb{R})$ était stable par transformée de Fourier, i.e. $f \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R})$. Puisque $S(\mathbb{R}) \subset L^1$ on peut appliquer le théorème d'inversion et donc $\mathcal{F}^2 = 2\pi\sigma$. Il s'en suit aussi que $\mathcal{F}$ est bijective. Il reste donc à voir que $\mathcal{F}$ est continue, l'inverse sera alors aussi continue d'après la formule d'inversion. Il suffit de montrer que pour toute suite $(f_n)_n$ convergeant vers 0 dans $S(\mathbb{R})$, il en est de même pour $(\hat{f}_n)_n$. Or on a :

$$\begin{aligned}
\|x^p \left(\hat{f}_n\right)^{(q)}\|_\infty &= \|x^p \widehat{t^q f_n}\|_\infty \\
&= \|\left(\left(\widehat{t^q f_n^{(p)}}\right)^p\right)\|_\infty \\
&\leq \|(t^q f_n)^{(p)}\|_1 \xrightarrow{n\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est justifié par le fait que $(t^q f_n)^{(p)}$ converge vers 0 dans $S(\mathbb{R})$ (par continuité de la dérivée et de la multiplication par un polynome dans $S(\mathbb{R})$) et donc dans $L^1(\mathbb{R})$.

$\square$

4 Transformée de Fourier dans L^2

Comme on va le voir la transformée de Fourier se prolonge à $L^2(\mathbb{R})$ en une isométrie (à constante près). Pour construire ce prolongement, on peut utiliser l'espace de Schwartz (voir Remarque 1). Cependant on peut s'en passer en travaillant avec les fonctions continues à support compact. C'est cette dernière alternative que nous avons choisie.

Lemme 1. *Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, alors*

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$$

PREUVE : On va se ramèner à la formule de Parseval pour les séries de Fourier des fonctions 2π périodiques.

Tout d'abord on peut supposer par dilatation que le support de f est inclus dans $[-\pi, \pi]$. On prolonge alors f par 2π périodicité sur $\mathbb{R}$ en une fonction notée $\tilde{f}$. La formule de Parseval appliquée à la fonction 2π périodique $g_\alpha := e^{-i\alpha\cdot}\tilde{f}$ donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_\alpha|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g_\alpha)|^2$$

mais clairement $\int_0^{2\pi} |g_\alpha|^2 = \int |f|^2$ et on calcule facilement :

$$c_n(g_\alpha) = \hat{f}(n + \alpha)$$

On obtient donc

$$\frac{1}{2\pi}\int |f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n+\alpha)|^2$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in [0, 1[$ on obtient en intégrant par rapport à α sur $[0, 1[$ et en utilisant Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int |f|^2 &= \int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n+\alpha)|^2\right) d\alpha \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\hat{f}(n+\alpha)|^2 d\alpha \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha \\
&= \int |\hat{f}|^2
\end{aligned}$$

□

Rappelons maintenant le théorème de prolongement qui nous permet d'étendre la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 4. *Soient X et Y deux espace métriques avec Y complet. Soient A une partie dense de X et $f : A \to Y$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application g continue telle que $g|_A = f$ et g uniformément continue.*

On peut maintenant énoncer et montrer le théorème de Plancherel.

Théorème 5. *Il existe une unique application linéaire continue bijective $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ telle que :*

- $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ *pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *;*
- $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$.

PREUVE : D'après le lemme précédent, la trasformée de Fourier de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ est uniformément continue lorsque ces deux espaces sont munis de la norme $\|\|_2$. Puisque $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}), \|\|_2)$ complet on peut appliquer le théorème de prolongement précédent. Il existe une unique application uniformément continue $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Par continuité de la norme et par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ la relation $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ se prolonge à tout $f \in L^2(\mathbb{R})$. On en déduit en particulier que $\mathcal{F}$ est injective.

Il reste à montrer d'une part que $\mathcal{F}$ est sujective et d'autre part que $\mathcal{F}$ coïncide avec la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et non pas seulement sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

Remarquez tout d'abord que $\mathcal{F}$ coïncide sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ avec la transformée de Fourier. Par construction c'est vrai sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Il est bien connu que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^i(\mathbb{R})$ pour $\|\|_i$ avec $i = 1, 2$ et donc dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\|_1$ ou $\|\|_2$. Mais on peut dire mieux : $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\|_1 + \|\|_2$ par troncature puis convolution avec une approximation de l'unité continue à support compact. Donc pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ il existe une suite $(f_n)_n$ dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f_n - f\|_1 + \|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Alors on a :

- $\mathcal{F}(f_n) = \hat{f}_n \xrightarrow{n\to+\infty} \mathcal{F}(f)$ dans $(L^2(\mathbb{R}), \|\|_2)$ car $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$ dans $L^2(\mathbb{R})$;
- $\hat{f}_n \xrightarrow{n\to+\infty} \hat{f}$ dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\|_\infty)$ car $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$ dans $(L^1(\mathbb{R}), \|\|_1)$ (rappelons que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$).

Puisque $\mathcal{F}(f_n)$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}(f)$ il existe une sous suite qui converge pp vers $\mathcal{F}(f)$. En particulier on conclut d'après le deuxième point : $\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x)$ pp. x.

Montrons maintenant que l'image de $\mathcal{F}$ est fermée. En effet si $g_n = \mathcal{F}(f_n)$ est une suite de $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ convergeant dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors g_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ et il en est de même de f_n d'après la relation $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$. La limite f des f_n vérifie alors $\mathcal{F}(f) = g$ par continuité de $\mathcal{F}$. On affirme maitenant que $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ contient les fonctions $\mathcal{C}^2$ à support compact, qui sont denses dans $(L^2(\mathbb{R}), \|\|_2)$, ce qui permet de conclure à la surjectivité de $\mathcal{F}$. Expliquons cette dernière affirmation. Soit g une fonction $\mathcal{C}^2$ à support compact. En particulier $g \in L^1$ et à support compact et donc $\hat{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De plus g' et g'' sont dans L^1 et on a $\widehat{g''} = -x^2\hat{g}$. Il s'en suit que $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer la formule d'inversion : pour tout $x \in \mathbb{R}$ (g est continue), $\hat{\hat{g}}(-x) = 2\pi g(x)$ et donc g est transformée de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

$\square$

Remarque 1. *Si on travaille avec l'espace de Schwartz, qui est dense dans $(L^2(\mathbb{R}), \|\|_2)$ car il contient les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, l'analogue du lemme 1 est immédiat. En effet si $f, g \in S(\mathbb{R})$ alors $f(\hat{-.}), \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et donc $\int \overline{\hat{f}}\hat{g} = \int \overline{\widehat{f}}(-.)\hat{g} = \int \overline{\widehat{\widehat{f}}}(-.)g = 2\pi \int \overline{f}g$. De plus la surjectivité est plus simple à montrer car $S(\mathbb{R}) = \mathcal{F}S(\mathbb{R})$ est une partie dense de $(L^2(\mathbb{R}), \|\|_2)$.*