DEVOIR MAISON À RENDRE AVANT LE 10 NOVEMBRE 2017

Soit $\phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ la rotation d'angle $\alpha \notin \mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On considère le produit semi-direct f_ϕ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ défini comme suit :[1]

$$\forall (x, y) \in \mathbb{T}^2, \quad f_\phi(x, y) = (R_\alpha(x), y + \phi(x)).$$

On note respectivement λ_1 et λ_2 les mesures de Haar sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (la mesure λ_1 est la mesure de Lebesgue induite sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et λ_2 est donné par le produit $\lambda_1 \times \lambda_1$).

Partie I : Cobords mesurables et unique ergodicité.

(1) Vérifier que la mesure λ_2 est f_ϕ-invariante. On a vu en cours que $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$ était uniquement ergodique si λ_2 est ergodique. Montrer que $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$ est aussi minimal dans ce cas.

Soit $\xi \in L^1(\lambda_2)$. On a par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int \xi \circ f_\phi \, d\lambda_2 &= \int \xi(x + \alpha, y + \phi(x)) \, dx \, dy \\ &= \int \xi(x + \alpha, z) \, dz \, dx, \\ &= \int \xi \, dx \, dz = \int \xi \, d\lambda_2.\end{aligned}$$

On a vu en cours que si λ_2 est ergodique, alors f_ϕ est uniquement ergodique. Dans ce cas tout point est générique pour λ_2. Mais l'orbite d'un point x générique pour λ_2 est dense. En effet si elle évitait un ouvert U on aurait

$$0 = \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} \delta_{f_\phi^k x}(U) \geq \lambda_2(U) > 0...$$

On peut aussi voir que si K est un compact invariant alors la mesure induite $\lambda_2|_K$ de λ_2 sur K est f_ϕ-invariante et distinct de λ_2, en particulier $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$ n'est pas uniquement ergodique.

(2) Dans la suite de cette partie on suppose que ϕ est un cobord mesurable, i.e. il existe une fonction mesurable $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) = \psi \circ R_\alpha(x) - \psi(x)$ pour λ_1-presque tout x. Montrer que les systèmes probabilistes $(\mathbb{T}^2, f_\phi, \lambda_2)$ et $(\mathbb{T}^2, R_\alpha \times Id_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}, \lambda_2)$ sont isomorphes.

1. Par abus de notation on ne fera pas de distinction entre un nombre réel et sa classe d'équivalence dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

On vérifie facilement que $\pi : (x,y) \mapsto (x, y-\psi(x))$ est une bijection bimesurable de $\mathbb{T}^2$ vérifiant pour λ_2-presque tout (x,y)

$$\begin{aligned} \pi \circ f_\phi(x,y) &= (x+\alpha, y+\phi(x)-\psi(x+\alpha)), \\ &= (x+\alpha, y-\psi(x)), \\ &= R_\alpha \times Id_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \circ \pi(x,y) \end{aligned}$$

Enfin un calcul similaire à 1) nous donne $\pi^*\lambda_2 = \lambda_2$.

(3) Vérifiez que $(\mathbb{T}^2, R_\alpha \times Id_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}, \lambda_2)$ n'est pas ergodique et en déduire que le système topologique $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$ n'est pas uniquement ergodique.

Pour tout $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times A$ est invariant par $R_\alpha \times Id_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ et de λ_2-mesure différente de 0 et 1 lorsque $\lambda_1(A) \neq 0, 1$. L'isomorphisme préservant l'ergodicité, il s'en suit que $(\mathbb{T}^2, f_\phi, \lambda_2)$ n'est pas ergodique. En particulier $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$ n'est pas uniquement ergodique car il admet une mesure invariante non ergodique.

Partie II : Cobords continus et minimalité.

(1) On suppose que ϕ est un cobord continu, i.e. il existe une fonction continue $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ satisfaisant $\phi = \psi \circ R_\alpha - \psi$. En s'inspirant de la première partie, montrer que le système topologique $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$ n'est pas minimal.

La conjugaison de la question 2 de la partie I est maintenant topologique (c.à.d. π est un homéomorphisme). Le système topologique $R_\alpha \times Id_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ n'étant pas minimal, il en est de même de $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$ car la conjugaison topologique préserve la minimalité.

(2) On s'intéresse dans la suite de cette partie à la réciproque de la question 1 sous l'hypothèse $\int \phi \, d\lambda_1 = 0$. On suppose donc que $\int \phi \, d\lambda_1 = 0$ et que (X, f_ϕ) n'est pas minimal. On considère un compact propre non vide K de $\mathbb{T}^2$ satisfaisant $f_\phi(K) = K$. Pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on pose

$$K_x := \{y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \ (x,y) \in K\}.$$

a) Montrer que K_x est un compact non vide pour tout x.

La projection de K sur le premier facteur est un compact invariant par R_α minimal. Elle coincide donc avec tout $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ce qui revient à dire que $K_x \neq \emptyset$ pour tout x.

b) Montrer que pour tout $x, x' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ il existe $\alpha_{x,x'} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tel que $K_x + \alpha_{x,x'} \subset K_{x'}$. En déduire que $K_x \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour tout x.

Par invariance de K on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$K_{x+n\alpha} = K_x + c_x(n)$$

avec $c_x(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(x+k\alpha)$. Soit $(n_k)_k$ une suite d'entiers avec $x + n_k\alpha \xrightarrow{k} x'$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $c_x(n_k)$ converge dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si on note $\alpha_{x,x'}$ la limite, on a pour tout $y \in K_x$

(autrement dit pour tout $(x,y)\in K$)

$$\begin{aligned}(x', y+\alpha_{x,x'}) &= \lim_k (x+n_k\alpha, y+c_x(n_k)),\\ &= \lim_k f_\phi^{n_k}(x,y)\in K \text{ car } K \text{ est fermé et } f_\phi\text{-invariant}\end{aligned}$$

et donc $y+\alpha_{x,x'}\in K_{x'}$. Si $K_x=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour un certain x on l'a pour tout x' d'après l'inclusion précédente, mais alors $K=\mathbb{T}^2$.

c) Puis montrer que $K_x+\alpha_{x,x'}=K_{x'}$ (on pourra vérifier que si $K_x+\beta\subset K_x$ pour un certain β alors on a en fait $K_x+\beta=K_x$).

D'après la question précédente on a $K_x+\alpha_{x,x'}\subset K_{x'}\subset K_x-\alpha_{x',x}$. On a donc $K_x+\beta\subset K_x$ avec $\beta=\alpha_{x,x'}+\alpha_{x',x}$. Si β était irrationnel on aurait alors $K_x=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par minimalité de R_β. Donc $\beta=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ et

$$K_x=K_x+q\beta\subset K_x+(q-1)\beta\subset \ldots\subset K_x+\beta\subset K_x.$$

Remarquez qu'on a montré au passage que $K_x+\frac{1}{q}=K_x$.

(3) Montrer qu'il existe $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $\psi: x'\mapsto\alpha_{0,x'}$ définisse une application continue de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

L'ensemble des réels β tels que $K_0+\beta=K_0$ est un sous-groupe non-dense de $\mathbb{R}$ (sinon on aurait $K_0=\mathbb{T}^2$). D'après la discussion précédente il est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha=\frac{1}{q}$.

Montrons maintenant que ψ est continue de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$. On a comme dans la question 2)b)

$$\begin{aligned}K_x &\supset \limsup_{y\to x} K_y,\\ K_0+\psi(x) &\supset \limsup_{y\to x} K_0+\psi(y).\end{aligned}$$

Donc si $z=\lim_n\psi(y_n)$ avec $y_n\xrightarrow{n}x$, on obtient

$$K_0\supset K_0+z-\psi(x)$$

D'après les questions précédentes cela entraine $K_0=K_0+z-\psi(x)$ puis $z-\psi(x)\in\frac{1}{q}\mathbb{Z}$. Ceci montre bien que ψ est continue de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

(4) Vérifier que $\psi(x+\alpha)-\psi(x)=\phi(x)$ pour tout x (où l'on considère ici $\phi(x)$ dans $\mathbb{R}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$).

De $f_\phi(\{x\}\times K_x)=\{x+\alpha\}\times K_{x+\alpha}$ on tire

$$K_x+\phi(x)=K_{x+\alpha}$$

et donc

$$K_0+\psi(x)-\psi(x+\alpha)+\phi(x)=K_0$$

ce qui avec les notations précédentes entraine $\psi(x)-\psi(x+\alpha)+\phi(x)$ modulo $[1/q]$ pour tout x.

(5) Soit un relèvement continu de ψ noté encore $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Vérifier qu'il existe des entiers k et l tels que

— la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout x par $\theta(x) = \psi(x) - \frac{k}{q}x$, est 1-périodique,
Le relèvement ψ vérifie pour un certain entier k,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x+1) = \psi(x) + k/q,$$

ce qui revient à la 1-périodicité de θ.

— $\psi \circ R_\alpha - \psi = \phi + \frac{l}{q}$.
$\psi \circ R_\alpha - \psi$ et ϕ fournissent deux relevés de l'égalité de la question (4). Par unicité du relèvement il diffère d'un multiple de $1/q$.

(6) Montrer que $k = l = 0$ puis conclure que ϕ est un cobord continu.
L'égalité de la question précédente s'écrit aussi $\theta \circ R_\alpha - \theta + k\alpha/q = \phi + l/q$. En intégrant par rapport à λ_1 on obtient $k\alpha/q = l/q$ (et donc $k = l = 0$ puisque $\alpha \notin \mathbb{Q}$) car

$$\int \phi \, d\lambda_1 = 0 \text{ (par hypothèse) et } \int \theta \circ R_\alpha \, d\lambda_1 = \int \theta \, d\lambda_1.$$

Partie III : Analyse de Fourier et petits diviseurs

On rappelle tout d'abord deux résultats d'analyse de Fourier :

i) Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi nx}$ une série de Fourier avec $\limsup_{|n|\to+\infty} \frac{\log|a_n|}{n} < 0$. Alors cette série définit une fonction analytique 1-périodique.

ii) La série de Fourier $\mathcal{S}_n\phi$ d'une fonction continue 1-périodique est Césaro sommable, i.e. $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\le k\le n} \mathcal{S}_k\phi\right)_n$ converge (uniformément vers ϕ).

(1) Soient $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles avec $s_j > t_j > 0$ pour tout j et $\lim_j s_j = 0$.

a) On suppose qu'il existe des entiers $0 < n_0 < n_1 < \ldots < n_j$ et des intervalles compacts d'intérieur non vide $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \supset K_1 \supset K_2 \ldots \supset K_j$ tel que pour tout $0 \le l \le j$ et $x \in K_l$

$$t_{n_l} \le |1 - e^{ixn_l}| \le s_{n_l}.$$

Montrer qu'il existe un entier n_{j+1} arbitrairement grand et un intervalle compact d'intérieur non vide $K_{j+1} \subset K_j$ tel que pour tout $x \in K_{j+1}$

$$t_{n_{j+1}} \le |1 - e^{ixn_{j+1}}| \le s_{n_{j+1}}.$$

On pourra choisir n_{j+1} assez grand de sorte que $n_{j+1}K_j = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
Soit L_{j+1} un intervalle fermé d'intérieur non vide tel que pour tout $x \in L_{j+1}$ on ait

$$t_{n_{j+1}} \le |1 - e^{ix}| \le s_{n_{j+1}}.$$

Puisque $n_{j+1}K_j = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, il existe un sous-intervalle fermé d'intérieur non vide K_{k+1} de K_j tel que $n_{j+1}K_{j+1} = L_{j+1}$. On construit ainsi par récurrence $(n_j)_j$ et $(K_j)_j$.

b) En déduire qu'il existe un irrationel α et une suite $(n_j)_j$ d'entiers positifs non nuls croissant arbitrairement vite tels que

$$t_{n_j} \leq |1 - e^{2i\pi\alpha n_j}| \leq s_{n_j}.$$

On prend $(n_j)_j$ comme dans les question précédentes et $2\pi\alpha \in \bigcap_j K_j$.

(2) On pose $s_j = e^{-j} = 2t_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On considère la fonction 1-périodique ϕ dont les coefficients de Fourier $c_n(\phi) = \int_0^1 \phi(t)e^{-2i\pi nt}dt$ vérifient $c_n(\phi) = 0$ pour $|n| \notin \{n_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$c_{n_j}(\phi) = \overline{c_{-n_j}(\phi)} = \frac{e^{-n_j}}{j} \frac{1 - e^{2i\pi n_j \alpha}}{|1 - e^{2i\pi n_j \alpha}|}.$$

a) Montrer que ϕ est une fonction réelle analytique d'intégrale nulle (sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour λ_1),

Cela suit du critère sur les coefficients de Fourier rappelé précédemment. En effet

$$\lim_j \frac{\log |c_{n_j}(\phi)|}{n_j} = -1.$$

L'intégrale de ϕ est nulle car $c_0(\phi) = 0$.

b) Montrer que ϕ est un cobord [2] L^2, mais pas un cobord continu.

Une fonction ψ dans L^2 vérifie λ_1-presque partout $\psi \circ R_\alpha - \psi = \phi$ ssi pour tout n on a $c_n(\psi)(1 - e^{2i\pi n\alpha}) = c_n(\phi)$. Ainsi ϕ est un cobord L^2 ssi la suite $\left(\frac{c_n(\phi)}{1-e^{2i\pi n\alpha}}\right)_n$ est de carré sommable. Or

$$\begin{aligned}
\left|\frac{c_{n_j}(\phi)}{1 - e^{2i\pi n_j \alpha}}\right| &= \frac{e^{-n_j}}{j|1 - e^{2i\pi n_j \alpha}|}, \\
&\leq \frac{e^{-n_j}}{j t_{n_j}}, \\
&\leq \frac{2}{j}.
\end{aligned}$$

Enfin on a pour tout j,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{n_j}\psi(0) &= \sum_{-j \leq l \leq j} \frac{e^{-n_l}}{|l||1 - e^{2i\pi n_l \alpha}|}, \\
&\geq 2 \sum_{1 \leq l \leq j} \frac{e^{-n_l}}{l s_{n_l}}, \\
&\geq 2 \sum_{1 \leq l \leq j} \frac{1}{l}
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{n_J} \sum_{0 \leq n \leq n_J} \mathcal{S}_n \psi(0) \geq \frac{1}{n_J} 2 \sum_{0 < j \leq J} (n - n_j)^+ \frac{2}{j} \xrightarrow{J} +\infty.$$

D'après le théorème de Féjer, la fonction ψ n'est pas continue car sa série de Fourier n'est pas Césaro sommable en 0.

2. i.e. il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dans L^2 tel que $\phi(x) = \psi \circ R_\alpha(x) - \psi(x)$ pour λ_1-presque tout x

Conclusion

Construire un difféomorphisme analytique du tore $\mathbb{T}^2$
minimal mais pas uniquement ergodique.

Pour un certain irrationel α on a construit une fonction anlaytique ϕ d'intégrale nulle qui est un cobord L^2 (d'après la partie I, f_ϕ n'est donc pas uniquement ergodique) mais qui n'est pas un cobord continue (d'après la partie II, f_ϕ est minimal).