DEVOIR MAISON MAT551 - 2018
A RENDRE POUR LE 9 NOVEMBRE
LE THÉORÈME D'OSSELEDETS EN DIMENSION 2

La qualité de la rédaction sera un facteur important de l'appréciation des copies. On pourra utiliser librement les résultats de la Partie I (même si vous n'avez pas réussi à les démontrer) pour traiter la Partie II.

1 Fibre d'une mesure pour une extension topologique

Soit $\pi : (Y, g) \to (X, f)$ une extension entre deux systèmes topologiques (X, f) et (Y, g), i.e. $\pi : Y \to X$ est une application continue surjective satisfaisant $\pi \circ g = f \circ \pi$. On fixe $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$ ergodique.

(1) Montrer que l'ensemble $\{\nu \in \mathcal{M}(Y, g),\ \pi^*\nu = \mu\}$ est convexe et compact pour la topologie faible $*$.

L'application π^* étant continue (resp. affine), l'ensemble $K^\mu = \{\nu \in \mathcal{M}(Y, g),\ \pi^*\nu = \mu\}$ est fermé et donc compact dans $\mathcal{M}(Y, g)$ (resp. convexe).

(2) Montrer que pour μ-presque tout point $x \in X$ et tout point $y \in Y$ avec $\pi(y) = x$, toute limite ν de $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} \delta_{g^k y}\right)_n$ dans $\mathcal{M}(Y)$ vérifie $\pi^*\nu = \mu$.

Posons $\mu_n^y = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{g^k y}$. Alors $\pi^*\mu_n^y = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k x}$, car on a $\pi(y) = x$. Mais pour μ presque tout x, la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k x}\right)_n$ converge vers μ. Par continuité de π^* on a alors $\pi^*\nu = \mu \in$.

(3) Vérifier que si $\nu \in \mathcal{M}(Y, g)$ avec $\pi^*\nu = \mu$ s'écrit sous la forme $\nu = \lambda\eta + (1-\lambda)\xi$ pour $\lambda \in]0, 1[$ et $\eta, \xi \in \mathcal{M}(Y, g)$ alors on a $\pi^*\eta = \pi^*\xi = \mu$. En déduire que les points extrémaux de $\{\nu \in \mathcal{M}(Y, g),\ \pi^*\nu = \mu\}$ sont des mesures ergodiques, et qu'en particulier il existe $\nu \in \mathcal{M}(Y, g)$ ergodique avec $\pi^*\nu = \mu$.

On a $\pi^*\nu = \lambda\pi^*\eta + (1-\lambda)\pi^*\xi$. Par ergodicité de μ on obtient $\pi^*\eta = \pi^*\xi = \mu$. Soit ν un point extrémal de K^μ. Il suffit de montrer que ν est aussi un point extrémal de $\mathcal{M}(Y, g)$. Mais on vient de voir que si ν s'écrit sous la forme $\nu = \lambda\eta + (1-\lambda)\xi$ alors $\xi, \eta \in K^\mu$...

On considère dans la suite de cette partie une fonction continue $\phi : Y \to \mathbb{R}$ et on note $\lambda := \inf_{\substack{\xi\in\mathcal{M}(Y,g)\\ \pi^*\xi=\mu}} \int \phi\, d\xi$.

(4) Montrer qu'il existe une mesure $\nu \in \mathcal{M}(Y, g)$ ergodique avec $\pi^*\nu = \mu$ telle que

$$\int \phi\, d\nu = \lambda.$$

Indications : On pourra raisonner comme précédemment en considérant le compact convexe non vide $\left\{\nu \in \mathcal{M}(Y, g),\ \pi^*\nu = \mu \text{ et } \int \phi\, d\nu = \lambda\right\}$.

La compacité, la convexité et le caractère non vide de $K_\phi^\mu := \left\{\nu \in \mathcal{M}(Y, g),\ \pi^*\nu = \mu \text{ et } \int \phi\, d\nu = \lambda\right\}$ suit de la continuité et du caractère affine de $\nu \in K^\mu \mapsto \int \phi\, d\nu$. En raisonnant comme dans la question précédente, on montre que si $K_\phi^\mu \ni \nu = \lambda\eta + (1-\lambda)\xi$, alors $\eta, \xi \in K_\phi^\mu$. On en déduit que les points extrémaux de K_ϕ^μ sont ergodiques.

(5) Montrer que pour μ-presque tout $x \in X$ et tout point $y \in Y$ avec $\pi(y) = x$ on a :

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\le k<n} \phi \circ g^k(y) \ge \lambda.$$

Indications : On pourra raisonner par l'absurde en considérant $y \in Y$ avec $\pi(y) = x$ et $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{0\le k<n} \phi\circ g^k(y) < \lambda$ puis vérifier que $\int \phi \, d\nu < \lambda$ pour une limite ν de $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\le k<n}\delta_{g^k y}\right)_n$ dans $\mathcal{M}(Y)$.

Soit y conmme dans l'indication. Avec $\mu_n^y = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{g^k y}$, on a pour toute limite ν de $(\mu_n^y)_n$

$$\begin{aligned} \lambda &> \liminf_n \int \phi \, d\mu_n^y, \\ &> \int \phi \, d\mu. \end{aligned}$$

D'après la question 2, on a aussi $\pi^*\nu = \mu$, ce qui contredit la définition de λ.

2 Théorème d'Osseledets

On considère un système topologique inversible (X, f) et un cocyle continu $A : X \to \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$, i.e. A est une application continue de X dans l'ensemble $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$ des applications linéaires inversibles de $\mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. La sphère unité de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|$ est notée $\mathbb{S}$. Un cocycle induit naturellement un système dynamique inversible F_A sur $X\times\mathbb{S}$ en posant $F_A(x,v) = \left(f(x), \frac{A(x)v}{\|A(x)v\|}\right)$ pour tout $(x,v) \in X\times\mathbb{S}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on note A^n le cocycle continu de X défini pour tout $x \in X$ comme suit :

$$A^n(x) = A(f^{n-1}x)A(f^{n-2}x)\cdots A(x) \text{ pour } n > 0$$

et

$$A^n(x) = \left(A(f^{-1}x)A(f^{-2}x)\cdots A(f^n x)\right)^{-1} \text{ pour } n < 0.$$

Nous proposons de montrer le théorème suivant dû à Osseledets :

Théorème.
Avec les notations et les hypothèses précédentes, pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$ ergodique il existe des réels $\lambda_1 \ge \lambda_2$ tels que pour μ-presque tout $x \in X$ on ait des vecteurs linéairement indépendants $v_1(x), v_2(x)$ de $\mathbb{R}^2$ dépendant de façon borélienne de x satisfaisant pour $i = 1, 2$:

$$\frac{1}{n}\log\|A^n(x)v_i(x)\| \xrightarrow{|n|\to+\infty} \lambda_i.$$

Les réels λ_1 et λ_2 sont appelés les exposants de Lyapunov de μ pour (f, A).

On fixe désormais $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$ ergodique. On considère sur $X\times\mathbb{S}$ la fonction réelle $\phi : (x, v) \mapsto \log\|A(x)v\|$ et on note $\pi : X\times\mathbb{S} \to X$ la projection sur la première coordonnée. Enfin pour $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on note

$$F^\lambda(x) = \{v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \ \frac{1}{n}\log\|A^n(x)v\| \xrightarrow{|n|\to+\infty} \lambda\}.$$

2.1 Le plus petit exposant et l'espace associé

(1) Vérifiez que $A(x)F^\lambda(x) = F^\lambda(f(x))$ pour tout $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Immédiat.

On pose $\lambda_2 = \inf_{\substack{\nu \in \mathcal{M}(X\times\mathbb{S},F_A)\\ \pi^*\nu=\mu}} \int \phi \, d\nu$.

(2) Montrer qu'il existe une mesure ν ergodique F_A-invariante telle que

$$\int \phi \, d\nu = \lambda_2.$$

Il suffit d'appliquer la question 4 de la partie I à ϕ pour F_A.

(3) En déduire que $F^{\lambda_2}(x) \neq \emptyset$ pour μ-presque tout $x \in X$. On prendra soin de distinguer *les cas $n \to +\infty$ et $n \to -\infty$.*
Indications : Appliquer le théorème ergodique aux systèmes probabilistes $(X \times \mathbb{S}, F_A, \nu)$ et $(X \times \mathbb{S}, F_A^{-1}, \nu)$ avec ϕ pour fonction test.

Pour tout $(x,v) \in X \times \mathbb{S}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ F_A^k(x,v) = \frac{1}{n}\log \|A^n(x)v\|$$

et

$$\forall n \in -\mathbb{N}, \ \ \frac{1}{|n|}\sum_{k=1}^{|n|} \phi \circ F_A^{-k}(x,v) = \frac{1}{n}\log \|A^n(x)v\|.$$

En appliquant le théorème ergodique à $(X \times \mathbb{S}, F_A, \nu)$ et $(X \times \mathbb{S}, F_A^{-1}, \nu)$ avec ϕ, on obtient que pour ν-presque tout (x,v), les sommes de Birkhov $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ F_A^k(x,v)$ et $\frac{1}{|n|}\sum_{k=1}^{|n|} \phi \circ F_A^{-k}(x,v)$ convergent tous deux vers $\int \phi \, d\nu = \lambda_2$. Soit E le borélien de ν-mesure totale où la convergence a lieu. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe par régularité de la mesure un compact $K_\epsilon \subset E$ de $X \times \mathbb{S}$ avec $\nu(K_\epsilon) > 1-\epsilon$. Alors $F = \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}} \pi(K_\epsilon)$ est un borélien de X de μ-mesure totale vérifiant $F \subset \{F^{\lambda_2}(x) \neq \emptyset\}$.

(4) Montrer que pour μ-presque tout $x \in X$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$$\liminf_{|n|\to+\infty} \frac{1}{n}\log \|A^n(x)v\| \geq \lambda_2.$$

Il suffit d'appliquer la question 5 de la partie I à F_A et F_A^{-1} avec ϕ.

2.2 Fin de la preuve du théorème d'Osseledets

(1) On pose $\lambda_1 := \sup_{\substack{\nu \in \mathcal{M}(X\times\mathbb{S},F_A)\\ \pi^*\nu=\mu}} \int \phi \, d\nu \geq \lambda_2$. Montrez que μ-presque tout $x \in X$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$$\limsup_{|n|\to+\infty} \frac{1}{n}\log \|A^n(x)v\| \leq \lambda_1.$$

Il suffit d'appliquer la question 5 de la partie I à F_A et F_A^{-1} avec $-\phi$.

(2) On suppose $\lambda_1 = \lambda_2$. Montrer que $F^{\lambda_2}(x) = \mathbb{R}^2$ pour μ-presque tout x. Conclure le théorème d'Osseledets dans ce cas et montrer que les exposants de Lyapunov sont alors tous les deux égaux à λ_2.
D'après les deux dernières questions on a $F^{\lambda_2}(x) = \mathbb{R}^2$ pour μ-presque tout x. Alors on peut prendre (v_1, v_2) des vecteurs linéairement indépendants constants.

(3) On se place dans l'autre cas : $\lambda_1 > \lambda_2$. Montrer que $F^{\lambda_1}(x) \neq \emptyset$ pour μ-presque tout $x \in X$.
Il faut reprendre II 2.1.2 et 2.1.3 avec $-\phi$ au lieu de ϕ, l'infimum devient un supremum...

(4) Conclure la preuve du théorème d'Osseledets.
Il suffit de prendre $v_i(x)$ unitaire dans $F^{\lambda_i}(x)$. Clairement $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendants.

2.3 La somme des exposants

(1) Soit $A \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$ montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$|\mathsf{det}(u, v)\mathsf{det}(A)| = |\mathsf{det}(Au, Av)| \leq \|Au\| \times \|Av\|.$$

La première égalité vient directement de la definition du déterminant d'un endomorphisme. Puis $|\mathsf{det}(Au, Av)|$ est l'aire du paralléllogramme formé par Au et Av, qui est maximale lorsqu'il s'agit d'un carré.

(2) En déduire que les exposants de Lyapunov λ_1, λ_2 de μ pour (f, A) vérifient

$$\int \log |\mathsf{det}(A(x))|\, d\mu(x) \leq \lambda_1 + \lambda_2.$$

On applique l'inégalité précédente à $A^n(x)$, $v_1(x)$ et $v_2(x)$:

$$|\mathsf{det}(v_1(x), v_2(x))\mathsf{det}(A^n(x))| \leq \|A^n(x)v_1(x)\| \times \|A^n(x)v_2(x)\|.$$

Puis $\frac{1}{n} \log |\mathsf{det}(A^n(x))| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |\mathsf{det}(A(f^k(x)))|$ tends vers $\int \log |\mathsf{det}(A(y))|\, d\mu(y)$ pour μ-presque tout x d'après le théorème ergodique. A partir de l'inégalité précédente et le Théorème d'Oseledets on obtient

$$\int \log |\mathsf{det}(A(y))|\, d\mu(y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$$

(3) Montrer que si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ sont les exposants de Lyapunov de μ pour (f, A) alors $-\lambda_2 \geq -\lambda_1$ sont les exposants de Lyapunov de μ pour $(f^{-1}, A^{-1}(f^{-1}\cdot))$.

Cela se vérifie facilement en remarquant que l'inverse de $G_{A,f} : (x, v) \mapsto (f(x), A(x)v)$ est donné par $G_{A^{-1}(f^{-1}.), f^{-1}}$.

(4) Conclure que $\lambda_1 + \lambda_2 = \int \log |\mathsf{det}(A(x))|\, d\mu(x)$.
On a $\int \log |\mathsf{det}(A^{-1}(f^{-1}x))| d\mu(x) = \int \log |\mathsf{det}(A^{-1}(x))| d\mu(x) = \int \log |\mathsf{det}(A(x))| d\mu(x)$. On conclut an appliquant la question 2.3 (2) au cocycle $(f^{-1}, A^{-1}(f^{-1}\cdot))$.

(5) Soit f un difféomorphisme du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ préservant la mesure de Lebesgue. Montrer que la somme des exposants de Lyapunov de toute mesure ergodique f-invariante est nulle pour le *cocycle dérivé* A donné par la différentielle $d_x f$ de f sur le plan tangent du tore (qui s'identifie naturellement à $\mathbb{R}^2$), i.e. $A(x)v = d_x f(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

L'invariance de la mesure de Lebesgue entraîne $|\mathsf{det}(d_x f)| = 1$ pour tout point x du tore. Donc $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.