# DEVOIR MAISON MAT551 - 2019
# A RENDRE POUR LE 9 NOVEMBRE

On considère le décalage unilatéral $\sigma$ sur $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la métrique $\mathsf{d}(u,v) = 2^{-\min(k\in\mathbb{N},\ u_k\neq v_k)}$ pour tout $u = (u_k)_k,\ v = (v_k)_k \in X$. Pour une fonction continue $\phi : X \to \mathbb{R}$, une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X,\sigma)$ est dite $\phi$-maximisante lorsque

$$\int \phi\, d\mu = -\alpha(\phi) := \sup_{\nu\in\mathcal{M}(X,\sigma)} \int \phi\, d\nu.$$

L'ensemble des mesures $\phi$-maximisantes sera noté $Max(\phi)$.

(0) Montrez que $Max(\phi)$ est un compact convexe non vide de $\mathcal{M}(X,\sigma)$.

On note $(Lip, \|\|)$ l'espace vectoriel normé des fonctions $\phi : X \to \mathbb{R}$ Lipschitziennes avec $L(\phi) := \sup_{x\neq y} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|}$ et $\|\phi\| := \max\left(\sup_{x\in X} |\phi(x)|, L(\phi)\right)$. Nous allons montrer le résultat suivant :

**Théorème.**
*Pour tout $\phi$ dans un ouvert dense de Lip il existe une unique mesure $\phi$-maximisante et celle-ci est supportée par une orbite périodique.*

## 1 Caractère Robuste

Dans cette partie on considère une fonction $\phi \in Lip$ telle qu'il existe une mesure maximisante $\mu_{\mathcal{O}}$ supportée par une orbite périodique $\mathcal{O}$ de periode $T_{\mathcal{O}}$. Pour $K \subset X$ on notera $\mathsf{d}_K : X \to \mathbb{R}$ la fonction distance à $K$, i.e. $\mathsf{d}_K = \mathsf{d}(\cdot, K)$.

(1) Pour $\epsilon > 0$ on note $\phi_\epsilon = \phi - \epsilon \mathsf{d}_{\mathcal{O}}$. Montrer que $\mu_{\mathcal{O}}$ est l'unique mesure $\phi_\epsilon$-maximisante pour tout $\epsilon > 0$.

Pour $\nu \neq \mu_{\mathcal{O}}$ on a $\nu(\mathcal{O}) \neq 1$ et donc $\int \mathsf{d}_{\mathcal{O}}\, d\nu \neq 0$. La mesure $\mu_{\mathcal{O}}$ étant $\phi$-maximisante on a

$$\begin{aligned}
\int \phi_\epsilon\, d\nu &= \int \phi\, d\nu - \epsilon \int \mathsf{d}_{\mathcal{O}}\, d\nu, \\
&\leq \int \phi\, d\mu_{\mathcal{O}} - \epsilon \int \mathsf{d}_{\mathcal{O}}\, d\nu = \int \phi_\epsilon\, d\mu_{\mathcal{O}} - \epsilon \int \mathsf{d}_{\mathcal{O}}\, d\nu, \\
&< \int \phi_\epsilon\, d\mu_{\mathcal{O}}.
\end{aligned}$$

(2) Soit $\epsilon > 0$ fixé et $\psi \in Lip$ avec $L(\psi - \phi) \leq \epsilon 2^{-T_{\mathcal{O}}-1}$. Montrer que pour tout $x \in X$ il existe $x_{\mathcal{O}} \in \mathcal{O}$ tel que

$$\forall 0 \leq k < T_{\mathcal{O}},\ |(\psi-\phi)(\sigma^k x) - (\psi-\phi)(\sigma^k(x_{\mathcal{O}})| \leq \frac{\epsilon}{2}\mathsf{d}_{\mathcal{O}}(x).$$

<u>*Indication :*</u> *on pourra remarquer que $\sigma : (X,\mathsf{d}) \circlearrowleft$ est 2-lipschitzienne.*

Pour $x \in X$ on choisit $x_{\mathcal{O}} \in \mathcal{O}$ tel que $d(x,\mathcal{O}) = d(x, x_{\mathcal{O}})$. Par composition l' application $(\psi - \phi) \circ \sigma^k$ est 1/2-Lipschitzienne pour tout $0 \le k < T_{\mathcal{O}}$ et donc

$$|(\psi-\phi)(\sigma^k x) - (\psi-\phi)(\sigma^k(x_{\mathcal{O}})| \le \frac{\epsilon}{2}\mathsf{d}_{\mathcal{O}}(x).$$

(3) En déduire que pour $\psi_\epsilon = \psi - \epsilon \mathsf{d}_{\mathcal{O}}$ on a

$$\forall \nu \in \mathcal{M}(\sigma, X), \ \int (\psi_\epsilon - \phi)\, d\nu \le \int (\psi - \phi)\, d\mu_{\mathcal{O}} - \frac{\epsilon}{2}\int \mathsf{d}_{\mathcal{O}}\, d\nu.$$

Pour tout $\nu \neq \mu_{\mathcal{O}}$ on obtient en intégrant l'inégalité précedente relativement à $\nu$ pour tout $0 \le k < T_{\mathcal{O}}$ :

$$\int (\psi-\phi)\circ\sigma^k\, d\nu \le (\psi-\phi)(\sigma^k(x_{\mathcal{O}}) + \frac{\epsilon}{2}\int \mathsf{d}_{\mathcal{O}}\, d\nu,$$
$$\int (\psi_\epsilon-\phi)\, d\nu \le (\psi-\phi)(\sigma^k(x_{\mathcal{O}}) - \frac{\epsilon}{2}\int \mathsf{d}_{\mathcal{O}}\, d\nu.$$

Puis on conclut en sommant sur $k$.

(4) Conclure que $\mu$ est l'une unique mesure $\psi_\epsilon$-maximisante.

La mesure $\mu_{\mathcal{O}}$ étant $\phi$-maximisante, on a pour $\nu \neq \mu_{\mathcal{O}}$

$$\begin{aligned}\int \psi_\epsilon\, d\nu &\le \int \psi\, d\mu_{\mathcal{O}} - \frac{\epsilon}{2}\int \mathsf{d}_{\mathcal{O}}\, d\nu,\\ &< \int \psi_\epsilon\, d\mu_{\mathcal{O}}.\end{aligned}$$

## 2 Sous-actions

Pour $\phi \in Lip$ et $x_0 \in X$ fixés, on considère l'opérateur $\mathcal{L} : Lip \circlearrowleft$ défini par

$$\forall \psi \in Lip, \ \mathcal{L}(\psi)(x) := \max_{\sigma(y)=x} (\alpha(\phi) + \phi(y) + \psi(y))$$

et

$$\tilde{\mathcal{L}}(\psi) = \mathcal{L}(\psi) - \mathcal{L}(\psi)(x_0).$$

On rappel le théorème de point fixe de Schauder :

**Théorème.**
*Soit $C$ un compact convexe d'un espace vectoriel normé et soit $T : C \to C$ une application continue. Alors $T$ a un point fixe.*

(1) Montrer que pour tout $\psi \in Lip, \ L(\mathcal{L}(\psi)) \le \frac{1}{2}(L(\psi) + L(\phi))$.

Pour $x, x', y \in X$ avec $\sigma(y) = x$ il existe $y'$ avec $\sigma(y') = x'$ et $d(y,y') \le d(x,x')/2$. Si $y$ réalise le maximum dans la definition de $\mathcal{L}\psi(x)$ on a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\psi(x) - \mathcal{L}\psi(x') &\le (\phi+\psi)(y) - (\phi+\psi)(y'),\\ &\le (L(\psi) + L(\phi))\, d(y,y'),\\ &\le \frac{1}{2}(L(\psi) + L(\phi))\, d(x,x').\end{aligned}$$

(2) On munit l'ensemble $E := \{\psi \in Lip, \|\psi\| \le \|\phi\|\}$ de la distance $\delta(\psi,\psi') = \sup_{x\in X} |\psi(x) - \psi'(x)|$. Montrer que :

i) $(E,\delta)$ est compact,

Cela découle directement du théorème d' Ascoli.

ii) $\tilde{\mathcal{L}}(E) \subset E$,

Pour $\psi \in E$, on a d'après la question précédente, $L(\tilde{\mathcal{L}}(\psi)) = L(\mathcal{L}(\psi)) \le \|\phi\|$ puis $\sup_{x\in X} |\tilde{\mathcal{L}}(\psi)(x)| \le \sup_{x\in X} |\mathcal{L}(\psi) - \mathcal{L}(\psi)(x_0)| \le L(\mathcal{L}(\psi)) diam(X) \le \|\phi\|$.

iii) $\tilde{\mathcal{L}} : E \circlearrowleft$ est continue.

Pour $\psi, \psi' \in E$ et $x \in X$ on a avec $y$ réalisant le max dans la définition de $\mathcal{L}(\psi)(x)$

$$\mathcal{L}\psi(x) - \mathcal{L}\psi'(x) \le |\psi(y) - \psi'(y)|.$$

On conclut facilement.

(3) A l'aide du théorème de Schauder, montrer l'existence de $u \in E$ et $c \in \mathbb{R}$ vérifiant $\mathcal{L}u = u + c$.

Il suffit d'appliquer le théorème de Schauder à $\tilde{\mathcal{L}}$.

(4) On pose $\overline{\phi} = \alpha(\phi) + \phi + u - u \circ \sigma$.

i) Etablir $\alpha(\overline{\phi}) = 0$.

Pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,\sigma)$ on a $\int (u - u\circ\sigma)\, d\mu = 0$ et donc

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,\sigma)} \int \overline{\phi}\, d\mu = \alpha(\phi) + \sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,\sigma)} \int \phi\, d\mu = 0.$$

ii) Vérifier que $\overline{\phi} \le c$. En déduire que $c \ge 0$.

Par définition de $\mathcal{L}$ on a

$$\forall \psi \in Lip,\ \mathcal{L}(\psi)\circ\sigma \ge \alpha(\phi) + \phi + \psi.$$

Donc $u\circ\sigma + c \ge \alpha(\phi) + \phi + u$ et $c \ge \overline{\phi}$. En intégrant on obtient $c \ge 0$ d'après la question précédente.

iii) Montrer que pour tout $x \in X$

$$[\overline{\phi}(x) = c] \Leftrightarrow [\mathcal{L}u\circ\sigma(x) = \alpha(\phi) + \phi(x) + u(x)].$$

$$[\overline{\phi}(x) = c] \Leftrightarrow [u\circ\sigma(x) + c = \alpha(\phi) + \phi(x) + u(x)] \Leftrightarrow [\mathcal{L}u\circ\sigma(x) = \alpha(\phi) + \phi(x) + u(x)]$$

.

iv) En déduire qu'il existe $\nu \in \mathcal{M}(X,\sigma)$ avec $\nu\left(\{\overline{\phi} = c\}\right) = 1$, puis que $c = 0$.
*Indications : On pourra remarquer* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \sigma^{-k}\{\overline{\phi} = c\} \ne \emptyset$.

D'après la question précédente, pour tout $x \in X$ il existe $y$ avec $\sigma(y) = x$ et $\overline{\phi}(y) = c$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\bigcap_{0\le k\le n} \sigma^{-k}\{\overline{\phi} = c\} \ne \emptyset$. Or cet ensemble est compact par continuité de $\overline{\phi}$ et par conséquent $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \sigma^{-k}\{\overline{\phi} = c\}$ est un compact invariant non vide. Il supporte donc une mesure $\sigma$-invariante $\nu$, qui vérifie alors

$$c = \int \overline{\phi}\, d\nu \le -\alpha(\overline{\phi}) = 0.$$

v) Conclure que $Max(\phi) = Max(\overline{\phi}) = \{\nu \in \mathcal{M}(X,\sigma),\ supp(\nu) \subset \{\overline{\phi} = 0\}\}$, où $supp(\nu)$ désigne le support de la mesure $\nu$.

$Max(\phi) = Max(\overline{\phi})$ suit comme i) du fait que l'intégrale d'un cocycle est nulle contre toute mesure invariante. Enfin on a $Max(\overline{\phi}) = \{\nu \in \mathcal{M}(X,\sigma),\ supp(\nu) \subset \{\overline{\phi} = 0\}\}$ puisque $\overline{\phi} \leq 0$ et $\sup_{\nu \in \mathcal{M}(\sigma,X)} \int \overline{\phi}\, d\nu = 0$.

## 3 Orbites périodiques près d'un sous-décalage

Pour un sous-décalage à alphabet fini $(Y,\sigma)$, on notera $\mathcal{L}_n(Y)$ l'ensemble des mots de $Y$ de longueur $n$. On considère un sous-décalage apériodique $K$ de $X$, i.e. $K$ est compact de $X$ avec $\sigma(K) \subset K$ et $K$ sans point périodique. On définit une structure de graphe sur $\mathcal{L}_n(K)$ en définissant une flèche de $u$ vers $v$, deux mots de $\mathcal{L}_n(K)$, si et seulement si la concatenation $uv$ appartient à $\mathcal{L}_{2n}(K)$. Soit $\Sigma_n$ le sous-décalage de type fini associé. Pour une orbite périodique $\mathcal{O}$ de $(X,\sigma)$, on note $\gamma(\mathcal{O}) = \min_{y \neq z \in \mathcal{O}} \mathsf{d}(y,z)$, $\Sigma_K(\mathcal{O}) = \sum_{z \in \mathcal{O}} \mathsf{d}_K(z)$ et $T(\mathcal{O})$ sa période. Un point périodique pour le décalage sera dit $k$-périodique si sa période est inférieure ou égale à $k$.

(1) Montrer que

$$\forall \alpha > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\sharp\mathcal{L}_n(K)^k}{\sharp\mathcal{L}_{nk}(K)} \leq e^{\alpha n k}.$$

La suite $u_n = (\sharp\mathcal{L}_n(K))^{1/n}$ converge par sous-multiplicativité vers une limite finie $l \geq 1$. Il suffit alors de prendre $N$ tel que $\frac{u_n}{u_p} < e^{\alpha}$ pour $p \geq n > N$.

(2) Montrer que si $(u_n)_n \in (\mathcal{L}_n(K))^{\mathbb{N}}$ est un point $k$-périodique de $\Sigma_n$, alors l'orbite $\mathcal{O}$ associée de $(X,\sigma)$ est $nk$-périodique et vérifie $\mathsf{d}_K(z) \leq 1/2^n$ pour tout $z \in \mathcal{O}$.

Cela découle directement du fait que pour tout $l$ on a $u_l u_{l+1} \in \mathcal{L}_{2n}(K)$.

(3) On suppose dans cette question que $\Sigma_n$ n'a pas de point $k$-périodique.

i) Montrer que tout mot de longueur $k$ de $\Sigma_n$ a $k$ lettres distinctes deux à deux.

Si $u_0 \cdots u_{k-1} \in \mathcal{L}_k(\Sigma_n)$ a deux lettres égales disons $u_p = u_q$ avec $0 \leq p < q < k$, alors $u_p \cdots u_{q-1}$ définit un point $k$-périodique de $\Sigma_n$.

ii) Montrer que deux mots distincts de longueur $k$ de $\Sigma_n$ n'ont pas le même ensemble de lettres.

Soient $u_0 \cdots u_{k-1} \neq v_0 \cdots v_{k-1} \in \mathcal{L}_k(\Sigma_n)$. Supposons par l'absurde qu'ils ont le même ensemble de lettres. Soit $0 \leq l < k-1$ avec $u_p = v_p$ pour $p = 0, \cdots, l-1$ et $u_l \neq v_l$. Alors on a $u_l = v_q$ pour $l < q \leq k-1$ et $v_{q-1} = u_r$ pour $l \leq r < k-1$. Enfin $u_l \cdots u_r$ définit un point $k$-périodique de $\Sigma_n$.

iii) En déduire que

$$\sharp\mathcal{L}_{nk}(K) \leq \sharp\mathcal{L}_k(\Sigma_n) \leq \binom{\sharp\mathcal{L}_n(K)}{k} \leq \left(\frac{e\sharp\mathcal{L}_n(K)}{k}\right)^k.$$

Un mot de longueur $nk$ dans $K$ correspond à un mot de longueur $n$ dans $\Sigma_n$, d'où la première inégalité. La deuxième inégalité suit directement des deux questions précédentes et la dernière de l'inégalité $\binom{p}{q} \leq p^q/q! \leq (ep/q)^q$.

(4) Conclure que pour tout $\delta > 0$ et tout $T > 0$ il existe une orbite périodique $\mathcal{O}$ de $(X, \sigma)$ satisfaisant
$$T \leq T(\mathcal{O}) \leq \Sigma_K(\mathcal{O})^{-\delta}.$$

Pour $\alpha > 0$ à préciser on choisit $N$ et $n > N$ comme dans la question 1). Puis si $\Sigma_n$ n'a pas de points $k$-périodiques et donc $Y$ de points $nk$-périodiques, on a d'après 3) :
$$e^{-\alpha n} \leq e/k.$$
Par conséquent $\Sigma_n$ a une orbite périodique de période $e^{\alpha n+1}+1$. D'après la question 2) l'orbite périodique $\mathcal{O}$ de $X$ associée vérifie $\Sigma_K(\mathcal{O}) \leq T(\mathcal{O})/2^n = n(e^{\alpha n+1}+1)/2^n$. Donc pour $\alpha$ assez petit et $n > N = N(\alpha)$ on a
$$T(\mathcal{O}) \leq n(e^{\alpha n+1}+1) \leq \Sigma_K(\mathcal{O})^{-\delta}.$$
Quitte à choisir $N$ plus grand on peut aussi garantir que $T < T(\mathcal{O})$ car $K$ est apériodique et vérifie $\mathsf{d}_K(z) \leq 1/2^n$ pour tout $z \in \mathcal{O}$.

(5) Nous allons montrer dans cette question que pour tout $\beta > 0$ il existe une orbite périodique $\mathcal{O}$ de $(X, \sigma)$ satisfaisant
$$\Sigma_K(\mathcal{O}) < \beta\gamma(\mathcal{O}).$$
On raisonne par l'absurde en supposant le contraire pour un certain $\beta > 0$.

i) Montrer que pour toute orbite périodique $\mathcal{O}_0$ avec $T(\mathcal{O}_0) > 2$ il existe une orbite périodique $\mathcal{O}_1$ avec $T(\mathcal{O}_1) \leq T(\mathcal{O}_0)/2$ avec $\Sigma(\mathcal{O}_1) \leq (1+1/\beta)\Sigma_K(\mathcal{O}_0)$.
*Indications : On pourra considérer une orbite périodique obtenue en "recollant" deux points $z_0 \neq \sigma^k(z_0)$ de $\mathcal{O}_0$ avec $d(z_0, \sigma^k(z_0)) = \gamma(\mathcal{O}_0)$ et $k > 0$ minimal.*

On choisit $\mathcal{O}_1$ une orbite comme dans l'indication. On peut supposer $k = T(\mathcal{O}_1) \leq T(\mathcal{O}_0)/2$. De plus il existe $z_1 \in \mathcal{O}_1$ tel que $d(z_1, \mathcal{O}_0) = d(z_1, z_0) \leq \gamma(\mathcal{O}_0)/2^{k-1}$. Alors on a
$$\begin{aligned}
\Sigma(\mathcal{O}_1) &= \sum_{z \in \mathcal{O}_1} d_K(z), \\
&\leq \sum_{0 \leq l < T(\mathcal{O}_1)} \left(d_K(\sigma^l z_0) + d(\sigma^l z_0, \sigma^l z_1)\right), \\
&\leq \Sigma_K(\mathcal{O}_0) + \gamma(\mathcal{O}_0), \\
&\leq (1+1/\beta)\Sigma_K(\mathcal{O}_0).
\end{aligned}$$

ii) En construisant de façon similaire $\mathcal{O}_n$ pour $n = 2, ...,$ obtenir une contradiction en prenant pour $\mathcal{O}_0$ l'orbite périodique de la question 4) pour $\delta$ et $T$ bien choisis.

On prend $\mathcal{O}_0$ comme dans la question 4) avec $T > 2$ et $\delta$ à préciser ultérieurement. Le processus s'arrête en un instant $N$ avec $N \leq \log_2 T(\mathcal{O}_0)$ et on a alors
$$\Sigma_K(\mathcal{O}_N) \leq (1+1/\beta)^N \Sigma_K(\mathcal{O}_0)$$
et donc
$$\Sigma_K(\mathcal{O}_0) \geq (1+1/\beta)^{-N} \inf_{T(\mathcal{O}) \leq 2} \Sigma_K(\mathcal{O}) \geq C_{ste} T(\mathcal{O}_0)^{-\log_2(1+1/\beta)}.$$
Pour $\delta$ avec $1/\delta > \log_2(1+1/\beta)$ et pour $T$ assez grand on obtient la contradiction
$$\Sigma_K(\mathcal{O}_0) > T(\mathcal{O}_0)^{-1/\delta}.$$

## 4 Perturbation

On considère une fonction $\phi \in Lip$ tel que $Max(\phi)$ ne contient pas de mesure supportée par une orbite périodique. Soit $\beta < 1$ et $\nu \in Max(\phi)$. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite périodique associée à $K = supp(\nu) \subset \{\overline{\phi} = 0\}$ donnée par la question 3.5. Remarquez que l'on peut supposer $\gamma(\mathcal{O}) < 1/2$. Nous allons montrer dans cette partie que pour $\beta$ bien choisi, la mesure $\mu$ supportée par $\mathcal{O}$ est $\overline{\phi}_\epsilon := \left(\overline{\phi}\right)_\epsilon = \overline{\phi} - \epsilon \mathsf{d}_{\mathcal{O}}$ maximisante (avec les notations de la partie 1) pour tout $\epsilon > 0$. Pour $\xi > 0$ on notera $\mathcal{O}^\xi$ le $\xi$-voisinage de $\mathcal{O}$. On fixe $\epsilon > 0$.

(1) Vérifier que $Max(\phi_\epsilon) = Max(\overline{\phi}_\epsilon)$.

Cela suit de la relation $\overline{\phi}_\epsilon = \alpha(\phi) + \phi_\epsilon + u - u \circ \sigma$.

(2) Montrer que $-L(\overline{\phi})\beta\frac{\gamma(\mathcal{O})}{T(\mathcal{O})} < \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}} < 0$.

*<u>Indications :</u> On pourra remarquer que pour $x \in \mathcal{O}$ on a $-\overline{\phi}(x) \leq L(\overline{\phi}) d_K(x)$.*

Tout d'abord $\int \overline{\phi} \, d\mu_{\mathcal{O}} < 0$ puisqu'on a supposé qu'il n'y avait pas de mesures $\phi$-maximisantes périodiques et que $Max(\phi) = Max(\overline{\phi})$. Puis pour $x \in \mathcal{O}$ on a

$$\begin{aligned} -\overline{\phi}_\epsilon(x) &= -\overline{\phi}(x), \\ &\leq L(\overline{\phi}) d_K(x), \end{aligned}$$

puis en sommant le long de l'orbite périodique $\mathcal{O}$

$$\begin{aligned} -\int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}} &\leq L(\overline{\phi}) \int \mathsf{d}_K \, d\mu_{\mathcal{O}}, \\ &= L(\overline{\phi}) \Sigma_K(\mathcal{O}) / T(\mathcal{O}), \\ &\leq L(\overline{\phi}) \beta \frac{\gamma(\mathcal{O})}{T(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

(3) Soit $\delta = L(\overline{\phi}) \frac{\beta}{\epsilon} \frac{\gamma(\mathcal{O})}{T(\mathcal{O})}$. On choisit $\beta$ petit de sorte que $\delta < \gamma(\mathcal{O})/2$. Soit $y \in \mathcal{O}^\delta \setminus \mathcal{O}$. Il existe alors $0 \leq m < n$ tels que $\sigma^k(y) \in \mathcal{O}^\delta$ pour $0 \leq k \leq m$, $\sigma^k(y) \in \mathcal{O}^{\gamma(\mathcal{O})} \setminus \mathcal{O}^\delta$ pour $m < k < n$ et $\sigma^n(y) \notin \mathcal{O}^{\gamma(\mathcal{O})}$.

i) Montrer qu'il existe $z_{\mathcal{O}} \in \mathcal{O}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{m} \left| \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) - \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y) \right| \leq 2(L(\overline{\phi}) + \epsilon)\delta.$$

Par définition de $m$ on a $d(y, \mathcal{O}) \leq \frac{\delta}{2^m}$ et donc pour $z_{\mathcal{O}} \in \mathcal{O}$ réalisant cette distance on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} \left| \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) - \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y) \right| &= \sum_{k=0}^{m} \left| \overline{\phi}(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) - \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y) \right|, \\ &\leq \sum_{k=0}^{m} \left| \overline{\phi}(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) - \overline{\phi}(\sigma^k y) \right| + \epsilon \sum_{k=0}^{m} d(\sigma^k y, \sigma^k z_{\mathcal{O}}), \\ &\leq 2(L(\overline{\phi}) + \epsilon)\delta. \end{aligned}$$

ii) Vérifiez que pour $M = \left[\frac{m}{T(\mathcal{O})}\right]$ on a

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) - MT(\mathcal{O}) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}\right| \leq T(\mathcal{O}) \left|\int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}\right|.$$

$$\begin{aligned} 0 \geq \sum_{k=0}^{m} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) - MT(\mathcal{O}) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}} &= \sum_{k=MT(\mathcal{O})}^{m} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}), \\ &\geq T(\mathcal{O}) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}. \end{aligned}$$

iii) Montrer que pour $x \notin \mathcal{O}^\xi$ on a $|\overline{\phi}_\epsilon(x)| \geq \epsilon\xi$.

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_\epsilon(x) &\leq -\epsilon d(x, \mathcal{O}), \\ &\leq -\epsilon\xi. \end{aligned}$$

iv) En déduire que pour $\beta$ bien choisi, on a avec les notations de la question 3)

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y) \leq (n+1) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}.$$

En combinant les questions précédentes on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y) &\leq \sum_{k=0}^{m} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y) - \epsilon(n-m-1)\delta - \epsilon\gamma(\mathcal{O}) \text{ par définition de } m \text{ et } n \text{ et d'après 3.iii) }, \\ &\leq \sum_{k=0}^{m} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) + \sum_{k=0}^{m} \left|\overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) - \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y)\right| - \epsilon(n-m-1)\delta - \epsilon\gamma(\mathcal{O}), \\ &\leq \sum_{k=0}^{m} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) + 2(L(\overline{\phi}) + \epsilon)\delta + (n-m-1) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}} - \epsilon\gamma(\mathcal{O}) \text{ d'après 2 et 3.i) }, \\ &\leq (MT(\mathcal{O}) + (n-m-1)) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}} + T(\mathcal{O}) \left|\int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}\right| + 2(L(\overline{\phi}) + \epsilon)\delta - \epsilon\gamma(\mathcal{O}) \text{ d'après 3.ii) }, \\ &\leq (n+1) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}} + 2T(\mathcal{O}) \left|\int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}\right| + 2(L(\overline{\phi}) + \epsilon)\delta - \epsilon\gamma(\mathcal{O}), \\ &\leq (n+1) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}} + 2\gamma(\mathcal{O})L(\overline{\phi})\beta + 2(L(\overline{\phi}) + \epsilon)\delta - \epsilon\gamma(\mathcal{O}).. \end{aligned}$$

Finalement pour $\beta \ll \epsilon^2$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y) \leq (n+1) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}} - \epsilon\gamma(\mathcal{O})/2.$$

(4) Déduire de la question précédente que $\mu_{\mathcal{O}}$ est une mesure maximisante de $\overline{\phi}_\epsilon$.
*Indications :* *Pour $\nu \neq \mu_{\mathcal{O}}$ ergodique et $x \in X$ un point $\nu$-typique, on découpera convenablement l'orbite de $x$, puis on utilisera l'inégalité obtenue dans la question précédente.*

On découpe l'orbite de $x$ en segment d'orbite de la forme décrite en 3) et en segment d'orbite en dehors de $\mathcal{O}^\delta$ (pour $k$ dans un tel segment on a alors $\overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k x) \leq -\epsilon\delta < \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}$ d'après la question 2. et le choix de $\delta$). On a donc

$$\int \overline{\phi}_\epsilon \, d\nu = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k x) \leq \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}.$$

Donc $\mu_{\mathcal{O}}$ est une mesure $\overline{\phi}_\epsilon$-maximisante.

## 5 Conclusion

Conclure la preuve du théorème.

Si l'on note $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{F}$) le sous-ensemble de $Lip$ possédant une (resp. unique) mesure maximisante supportée par une orbite périodique, alors

— d'après la partie 1, on a $\overline{Int(\mathcal{F})} = \overline{\mathcal{L}}$,

— d'après la partie 4, on a $\overline{\mathcal{L}} = Lip$.