DEVOIR MAISON MAT551 - 2020
A RENDRE POUR LE 6 NOVEMBRE

1 Cobords et mesures invariantes

Soit (X,T) un système dynamique topologique. On note $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. Une fonction ϕ de $C(X)$ est appelée un cobord lorsqu'il existe $\psi \in C(X)$ satisfaisant $\phi = \psi \circ T - \psi$. On écrira $C_b(X,T) \subset C(X)$ le sous ensemble des cobords :

$$C_b(X,T) = \{\phi \in C(X),\, \exists \psi \in C(X) \text{ tel que } \phi = \psi \circ T - \psi\}\,.$$

Enfin on pose

$$C_m(X,T) := \left\{\phi \in C(X),\, \int \phi\, d\mu = 0 \text{ pour tout } \mu \in \mathcal{M}(X,T)\right\}.$$

(1) Montrer que $C_m(X,T)$ est fermé dans $C(X)$ et établir l'inclusion $\overline{C_b(X,T)} \subset C_m(X,T)$.

$\phi \mapsto \int \phi\, d\mu$ est continue pour la norme uniforme, donc $C_m(X,T)$ est fermé. Si $\phi = \psi \circ T - \psi$ alors $\int \phi\, d\mu = 0$ par T-invariance de μ, i.e. $C_b(X,T) \subset C_m(X,T)$ puis $\overline{C_b(X,T)} \subset C_m(X,T)$, l'ensemble $C_m(X,T)$ étant fermé.

(2) On suppose $\overline{C_b(X,T)} \neq C_m(X,T)$.

i. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue Λ de $C(X)$ satisfaisant $\overline{C_b(X,T)} \subset \{\phi \in C(X),\, \Lambda(\phi) = 0\} \subsetneq C_m(X,T)$.

Il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach sur $C(X)$.

ii. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure signée finie μ telle que $\Lambda(\phi) = \int \phi\, d\mu$ pour tout $\phi \in C(X)$. Pour une telle mesure μ, il existe des mesures positives finies boréliennes μ_+, μ_- mutuellement singulières[1] avec $\int \phi\, d\mu = \int \phi\, d\mu_+ - \int \phi\, d\mu_-$ pour tout $\phi \in C(X)$. Ainsi définies les mesures μ_+ et μ_- sont uniques et si ν_+, ν_- sont des mesures positives finies avec $\int \phi\, d\mu = \int \phi\, d\nu_+ - \int \phi\, d\nu_-$ pour tout $\phi \in C(X)$, alors on a $\nu_+(A) \geq \mu_+(A)$ et $\nu_-(A) \geq \mu_-(A)$ pour tout Borélien A.

Montrer que μ_+ et μ_- sont T-invariantes.

On a $\Lambda(\psi \circ T - \psi) = 0$ et donc $\int \psi\, d\mu = \int \psi \circ T\, d\mu$ pour tout $\psi \in C(X)$.

iii. Conclure que $\overline{C_b(X,T)} = C_m(X,T)$.

Par ailleurs il existe $\phi \in C_m(X,T)$ avec $\Lambda(\phi) = \int \phi\, d\mu \neq 0$. Mais μ étant T-invariante ceci contredit la définition de $C_m(X,T)$.

(3) Montrer que pour tout $\phi \notin C_m(X,T) + \mathbb{R} := \{\phi + c,\, \phi \in C_m(X,T) \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$ il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(X,T)$ ergodiques avec $\int \phi\, d\mu_1 \neq \int \phi\, d\mu_2$.

Par définition de $C_m(X,T)$, il existe de telles mesures μ_i invariantes. Il existe alors des composantes ergodiques ν_i de μ_i satisfaisant $\int \phi\, d\nu_1 \neq \int \phi\, d\nu_2$.

1. On rappelle que deux mesures boréliennes μ et ν sur X sont mutuellement singulières s'il existe un Borélien E avec $\mu(E) = 1$ et $\nu(E) = 0$.

Soit σ le décalage sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ défini par $\sigma((u_n)_n) = (u_{n+1})_n$ pour tout $(u_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

(4) Montrer que les mesures périodiques sont denses parmi les mesures ergodiques de $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$. En déduire que pour tout $\phi \notin C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}$ il existe des mesure périodiques μ_1, μ_2 satisfaisant $\int \phi \, d\mu_1 \neq \int \phi \, d\mu_2$.

Soit μ une mesure ergodique. Pour μ-presque tout $x = (x_n)_n$, la suite $\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} \delta_{T^k x}$ converge faible-$*$ vers μ. Alors la mesure périodique μ_n associée à la suite périodique $x_0 x_1 \cdots x_n x_0 x_1 \cdots$ converge aussi vers μ. On appoche alors les mesures ergodiques μ_i de la question précédente par des mesure périodiques.

(5) On note $H(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ le sous ensemble de $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ formé des fonctions Hölder. D'après le théorème de Lisvic (voir examen 2019), on a $H(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \cap C_b(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) = H(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \cap C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma))$.

Montrer que $H(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \cap \left(C_b(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}\right)$ est d'intérieur vide dans $H(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. En déduire que $C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}$ est d'intérieur vide dans $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

Soit $\phi \in H(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. Si $\phi \in C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}$, i.e. il existe c tel que $\int \phi \, d\mu = c$ pour tout μ, on perturbe alors ψ au voisinage du point fixe 0^∞ sans changer sa valeur en 1^∞ : pour $\epsilon > 0$ on peut par exemple considérer la fonction Holder donnée par $\psi_\epsilon = \psi + \epsilon 1_{x_0=0}$). Alors $\psi_\epsilon \notin C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}$ et converge vers ψ quand ϵ tend vers 0.

2 Ensemble de divergence : quelques généralités

Pour $\phi \in C(X)$, on note $\mathcal{B}(\phi)$ l'ensemble de divergence de ϕ, i.e. l'ensemble des points où les moyennes de Birkhof divergent :

$$\mathcal{B}(\phi) := \left\{ x \in X, \ \underline{\lim}_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) < \overline{\lim}_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) \right\}.$$

(6) Vérifier que $\mathcal{B}(\phi)$ est un ensemble borélien σ-invariant de μ-mesure nulle pour tout mesure $\mu \in \mathcal{M}(X, \sigma)$. Montrer que si (X,T) est uniquement ergodique alors $\mathcal{B}(\phi)$ est vide pour tout $\phi \in C(X)$.

Cela suit du théorème ergodique ponctuel et du théorème ergodique uniforme.

(7) Vérifier que $\mathcal{B}(\phi)$ est vide si $\phi \in C_m(X,T)$ et qu'alors on a $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(x) = 0$ pour tout $x \in X$.

Si $\phi = \psi \circ T - \psi$ alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(x) = \frac{\psi \circ T^n(x) - \psi(x)}{n} \xrightarrow{n} 0$.

3 Ensemble de divergence pour des dynamiques minimales

Dans cette partie on suppose (X,T) minimal. On considère $\phi \notin C_m(X,T) + \mathbb{R}$.

(8) Soit $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ une mesure ergodique. Pour $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$W(N, \epsilon) := \left\{ x \in X, \ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) \geq \int \phi \, d\mu + \epsilon \text{ pour tout } n \geq N \right\}.$$

Montrer que $W(N,\epsilon)$ est un fermé d'intérieur vide pour tout $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

On raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un ouvert U inclus dans $W(N,\epsilon)$. Soit x un point μ-générique, en particulier $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x)$ converge vers $\int \phi \, d\mu$. Par minimalité de (X,T) il existe $n \in mathbbN$ avec $T^n x \in U$. Les limites en x et $T^n x$ des sommes de Birkhof normalisées coincident. On obtient une contradiction car en $T^n x$ on a $\underline{\lim}_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\circ T^k(x) \geq \int \phi\, d\mu + \epsilon$ par définition de $W(N,\epsilon)$.

(9) Conclure que $\mathcal{B}(\phi)$ contient un sous ensemble $\mathcal{G}_\delta$ dense de X.

On a $\left\{x,\ \underline{\lim}_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\circ T^k(x) > \int \phi\, d\mu\right\}$ est contenu dans le F_σ d'intérieur vide $\bigcup_{N\in\mathbb{N},\, \epsilon\in\mathbb{Q}} W(N,\epsilon)$. De façon similaire $\left\{x,\ \overline{\lim}_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\circ T^k(x) < \int \phi\, d\mu\right\}$ est contenue dans un F_σ d'intérieur vide. On conclut en appliquant ceci respectivement à μ_1 et μ_2, les mesures données par (4).

4 Ensemble de divergence pour le décalage sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

On considère de nouveau le décalage σ sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\phi \notin C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\sigma)+\mathbb{R}$. On rappelle que le n-cylindre associé à un mot fini de longueur n est l' ensemble des suites de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dont les n-premières coordonnées coincide avec ce mot. Soit C_n l'ensemble des n-cylindres. Pour un sous ensemble K de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, a priori ni compact ni σ-invariant, on définit l'entropie topologique de σ sur K comme suit :

$$h_{top}(K) := \overline{\lim}_n \frac{1}{n}\log \sharp\{C\in C_n,\ C\cap K\neq\emptyset\}.$$

(10) Soit $\mu_{\max}$ la mesure de Bernoulli de paramètre $(1/2,1/2)$. Montrer qu'il existe un sous ensemble L de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ avec $h_{top}(L)=\log 2$ tel que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\circ\sigma^k$ converge uniformément vers $\int \phi\, d\mu_{max}$ sur L quand n tend vers l'infini.

La mesure de Bernoulli étant ergodique $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\circ\sigma^k(x)$ converge vers $\int\phi\, d\mu_{max}$ pour μ_{max} presque tout point. D'après le théorème de Lusin cette suite converge uniformément sur un ensemble L avec $\mu_{max}(L)\geq 1/2$. Or on a $\mu_{max}(L)\leq \frac{\sharp C_n\cap K}{2^n}$. Donc $h_{top}(L)=\log 2$.

Soient μ_1,μ_2 des mesures périodiques comme en (4). Dans la suite on note $w_i\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{0,1\}^n$, $i=1,2$ un mot fini tel que μ_i soit associée à la suite périodique $w_i.w_i.w_i\cdots$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ obtenue par concaténation successive de w_i (on notera $u.v$ la concaténation de deux mots finis u et v). Pour un mot infini $w\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ on note $w(n)\in\{0,1\}^n$ le mot tronqué défini par les n premières coordonnées de w.

(11) Soient $l=(l_k)_k$, $m=(m_k)_k$ et $n=(n_k)_k$ trois suites strictement croissantes d'entiers à préciser. On considère le sous-ensemble $K=K(l,m,n)$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ formé des suites u obtenues par concaténation successives de la façon suivante. A toute suite $(w^k)_k\in L^{\mathbb{N}}$ on définit par récurrence les mots u_p, $p\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \emptyset,\\ u_{2k+1} &= u_{2k}.w^{2k}(l_{2k}).\underbrace{w_1.\cdots.w_1}_{m_k \text{ fois}},\\ u_{2k+2} &= u_{2k+1}.w^{2k+1}(l_{2k+1}).\underbrace{w_2.\cdots.w_2}_{n_k \text{ fois}}. \end{aligned}$$

On note alors u la suite infinie de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *limite* des mots u_p, i.e. dont les mots finis u_p sont des troncatures. Soit q_k la longueur commune des mots finis u_k. On suppose que $\lim_k \frac{q_{k+1}}{q_k}=+\infty$ et que les limites suivantes sont bien définies : $\delta_1 := \lim_k \frac{l_{2k}}{|w_1|m_k+l_{2k}}$ et $\delta_2 := \lim_k \frac{l_{2k+1}}{|w_2|n_k+l_{2k+1}}$, où $|w_i|$ désigne la longueur du mot w_i.

i. Montrez que

$$h_{top}(K)\geq \max_i \delta_i\cdot\log 2.$$

Puisque $\lim_k \frac{q_{k+1}}{q_k} = +\infty$ on a $\overline{\lim}_k \frac{1}{q_{k+1}} \log \sharp C_{q_{k+1}} \cap L = \overline{\lim}_k \frac{1}{q_{k+1}-q_k} \log \sharp C_{l_k \cap L} = \max_i \delta_i \cdot \log 2$.

ii. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier r tel que pour tout x, y dans un même r-cylindre on ait $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$.

Cela suit immédiatement de l'uniforme continuité de ϕ.

iii. Montrer que pour tout $u \in K$,

$$\underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u) \leq \delta_1 \int \phi \, d\mu_{max} + (1-\delta_1) \int \phi \, d\mu_1,$$

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u) \geq \delta_2 \int \phi \, d\mu_{max} + (1-\delta_2) \int \phi \, d\mu_2.$$

Il suit encore de $\lim_k \frac{q_{k+1}}{q_k} = +\infty$ que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u) &\leq \underline{\lim}_k \frac{1}{q_{2k+1} - q_{2k}} \sum_{l=q_{2k}}^{q_{2k+1}-1} \phi \circ \sigma^l(u), \\
&\leq \epsilon + \underline{\lim}_k \frac{l_{2k}}{q_{2k+1} - q_{2k}} \frac{1}{l_{2k}} \sum_{l=0}^{l_{2k}} \phi \circ \sigma^l(w^{2k}) + \frac{|w_1| m_k}{q_{2k+1} - q_{2k}} \sum_{l=0}^{|w_1| m_k} \phi \circ \sigma^l(w_1), \\
&\leq \epsilon + \delta_1 \int \phi \, d\mu_{max} + (1-\delta_1) \int \phi \, d\mu_1
\end{aligned}$$

iv. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, on peut choisir les suites l, m, n de sorte que $h_{top}(K) \geq (1-\alpha) \log 2$ et pour tout $u \in K$,

$$\underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u) < \overline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u).$$

Il suffit de prendre $\delta_1 = \delta_2 = 1 - \alpha$.

(12) Conclure que pour $\phi \notin C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}$, l'ensemble de divergence $\mathcal{B}(\phi)$ est d'entropie totale :

$$h_{top}(\mathcal{B}(\phi)) = \log 2.$$

Notons $K_\alpha \subset \mathcal{B}(\phi)$ l'ensemble obtenu dans la question précédente. Alors $K = \bigcup_{\alpha > 0} K_\alpha$ satisfait $h_{top}(K = \log 2$...