Devoir Maison MAT551 - 2021
Quelques propriétés des échanges d'intervalle,
A rendre pour le 19 Novembre

29 novembre 2021

Un échange d'intervalle est une translation par morceaux de l'intervalle $[0,1[$, qui est une bijection de $[0,1[$. Plus précisément une telle transformation bijective $f:[0,1[\to[0,1[$ est donnée par une partition finie P de l'intervalle $[0,1[$ en sous-intervalles $J_i=[a_{i-1},a_i[$, $i=1,\cdots,r$ avec $0=a_0<\cdots a_k\cdots<a_r=1$ et par une permutation π de $\{1,\cdots,r\}$. L'échange d'intervalle $f:[0,1[\circlearrowleft$ associé à P et π est la bijection de $[0,1[$ définie comme suit :

— $f|_{J_i}$ est une translation pour tout i,

— $[\forall(x,y)\in J_k\times J_l,\ f(x)<f(y)]\Leftrightarrow[\pi(k)<\pi(l)]$.

On parle de k-échange d'intervalles si $\sharp P=k\in\mathbb{N}^*$. On notera $A(f):=\{a_i,\ i=1,\cdots,r-1\}$ et $\mathcal{M}(f,[0,1[)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes de $[0,1[$ invariantes par f.

1) On pose $\lambda_i=a_i-a_{i-1}$, $i=1,\cdots,r$. Montrer que

$$\forall i=1,\cdots,r\ \forall x\in J_i,\ f(x)=x+\sum_{\pi(j)<\pi(i)}\lambda_j-\sum_{j<i}\lambda_j.$$

Solution: Pour i fixé, $\sum_{\pi(j)<\pi(i)}\lambda_j$ représente la somme des longueurs des intervalles qui vont se placer avant $f(J_i)$, tandis que $\sum_{j<i}\lambda_j$ représente la somme des longueurs des intervalles avant J_i...

2) Vérifier que la mesure de Lebesgue sur l'intervalle, notée m, est f-invariante.

Solution: Il s'agit de vérifier que $m(f^{-1}A)=m(A)$ pour tout borélien A. Mais $f^{-1}A=\coprod_i f^{-1}(J_i\cap A)$ et $f|_{J_i}$ étant une translation on a $m(f^{-1}(J_i\cap A))=m(J_i\cap A)$.

1 Préliminaires

1.1 Irréductibilité et puissance.

On dit que l'échange d'intervalle est minimal quand l'orbite $\{f^nx,\ n\in\mathbb{N}\}$ de tout point $x\in[0,1[$ est dense dans $[0,1[$. On dit que l'échange d'intervalle est **irréductible** s'il n'existe pas d'entier $k\in[1,r-1]$ tel que $\pi(\{1,\cdots,k\})=\{1,\cdots,k\}$.

3) Montrer que tout échange d'intervalle minimal est irréductible.

Solution: Si π n'est pas irréductible, il existe $\emptyset\neq I\subsetneq\{1,\cdots,r\}$ tel que $\bigcup_{i\in I}J_i$ soit f-invariant. En particulier, f n'est pas minimal.

4) Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, montrer que l'application itérée f^m est aussi un échange d'intervalle avec $A(f^m)\subset\bigcup_{k=0}^{m-1}f^{-k}A(f)$.

Solution: Notons P^m la partition en intervalle délimitée par $\bigcup_{k=0}^{m-1} f^{-k}A(f)$. Pour tout intervalle I de P^m et tout $0 \leq k < m$, l'intervalle $f^k I$ est inclus dans un intervalle de P. En particulier $f^m|_I$ est une translation.

1.2 Induction.

Soit $J = [a, b[\neq \emptyset$ un sous-intervalle de $[0, 1[$. On note

$$B_J := \{a, b\} \cup \{a_i, \ i = 1, \cdots, r-1\}.$$

Pour tout $x \in [0, 1[$, on pose $s(x) = \inf\{n \in \mathbb{N}, \ f^{-n}x \in]a, b[\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$ et f^0 égale à l'identité. On considère alors l'ensemble $C_J := \{f^{-s(x)}x, \ x \in B_J$ avec $s(x) < +\infty\}$.

5) Montrer que $\sharp C_J \leq r + 1$.

Solution: Cela suit directement de $\sharp C_J \leq \sharp B_J \leq r + 1$.

6) On note $C_J \cup \{a, b\} := \{d_0 = a < d_1 < \cdots < d_s = b\}$. Montrer à l'aide du principe de récurrence de Poincaré, que pour tout $j = 0, \cdots, s-1$ il existe un entier $n > 0$ tel que $f^n([d_j, d_{j+1}[) \cap J \neq \emptyset$. On note n_j le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette propriété.

Solution: D'après le théorème de récurence de Poincaré, Leb presque tout point de $[d_j, d_{j+1}[$ retourne dans $[d_j, d_{j+1}[\subset J$. En particulier il existe $n > 0$ avec $J \cap f^n[d_j, d_{j+1}[\neq \emptyset$.

7) Vérifier que la restriction de f^{n_j} à $[d_j, d_{j+1}[$ est une translation.

Solution: Sinon il existe $0 \leq k < n_j$ et $i \in [1, r-1]$ tels que $a_i \in f^k]d_j, d_{j+1}[$. Alors il existe $y \in]d_j, d_{j+1}[\subset]a, b[$ tel que $f^k y = a_i$. Mais $f(y), \cdots, f^{k-1}y \notin J$ car cela contredirait le caractère minimal de n_j. Il s'en suit que $y = f^{-s(a_I)}a_i \in C_J$ mais ce point ne peut appartenir à $]d_j, d_{j+1}[$ par définition des d_j.

8) Montrer que $f^{n_j}([d_j, d_{j+1}[) \subset J$. En déduire que le temps de retour τ_J dans J, défini par $\tau_J(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}^*, \ f^n(x) \in J\}$ pour $x \in J$, est égal à n_j sur $[d_j, d_{j+1}[$. Par la suite on note $\mathcal{N}(J) := \{n_j, j = 0, \cdots, s-1\}$.

Solution: D'après la question précédente, $f^{n_j}([d_j, d_{j+1}[)$ est un intervalle. Puisqu'il intesecte J, s'il n'est pas inclus dans J alors une de ses bornes a ou b est dans $f^{n_j}(]d_j, d_{j+1}[)$ et donc $f^{-s(a/b)}(A/b)$ appartient à $]d_j, d_{j+1}[$, ce qui contredit la définition des d_j comme dans la question précédente.

Donc $f^{n_j}([d_j, d_{j+1}[) \subset J$. Pour tout $x \in [d_j, d_{j+1}[$ on a donc $\tau_J(x) \leq n_j$. Mais on a aussi $\tau_J(x) \leq n_j$ car $f^k([d_j, d_{j+1}[) \cap J = \emptyset$ pour $0 < k < n_j$.

9) En déduire que l'application $f^J := f^{\tau_J}$ de premier retour dans J est un k-échange d'intervalle avec $k \leq r + 2$.

Solution: L'application f étant bijective il en est de même de f_J^τ. De plus sur chaque atome de la partition $[d_j, d_{j+1}[, \ j = 0, \cdots, r-1$ de J, $f_J^\tau = f^{n_j}$ est une translation d'après les questions précédentes.

10) Montrer que les composantes connexes de $E_J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n J$ sont en nombre fini et de la forme $[c, d[$. Verifier également que $f(E_J) = E_J$.

Solution: L'ensemble E_J est égale à l'union finie des $f^k(([d_j, d_{j+1}[))$ pour $0 \leq k < n_j$ et $j = 1, \cdots, r-1$. Or ces ensembles sont tous de la forme $[c, d[$.

1.3 Mesures invariantes.

Dans cette partie 1.3, on suppose f minimal.

11) Montrer que toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(f, [0, 1[)$ est sans atomes [1] et vérifie $\mu(O) > 0$ pour tout ouvert O non vide. Indications : Pour ce dernier point on pourra considérer un point x dans le support de μ tel que $f^n x \neq a_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [0, r]$.

1. i.e. $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$

Solution: Si μ avait un atome, il existerait un point périodique, ce qui est exclus car f est supposé minimal. On suit l'indication. Un tel point x existe car $H := \bigcup_n f^{-n}(\{a_i, i\})$ étant dénombrable, on a $\mu(H) = 0$. Soit O un ouvert non vide. Par minimalité il existe $n > 0$ avec $f^n x \in O$. Puisque $x \notin H$, l'ensemble $f^{-n}O$ est un voisinage de x. Puisque x est dans le support de μ, on a $\mu(f^{-n}O) > 0$. Par invariance de la mesure on obtient $\mu(f^{-n}O) = \mu(O) > 0$.

12) Montrer que pour, $\phi_\mu : x \mapsto \mu([0, x[)$ conjugue les systèmes dynamiques probabilistes (f, μ) à (g_μ, m), i.e. $g_\mu \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ f$ avec g_μ un autre échange d'intervalle. Déterminer la permutation et la partition associées à g_μ.

Solution: L'appication ϕ_μ est homéo de $[0,1]$ car μ est sans atome et charge tous les ouverts. De plus pour $x \in [a_i, a_{i+1}[$ on a

$$\begin{aligned}\phi_\mu(fx) &= \mu([fa_i, fx]) + \mu([0, f(a_i)), \\ &= \mu([a_i, x]) + \sum_{k, \pi(k) < \pi(i)} \mu(fJ_k), \\ &\mu([0, x]) + \sum_{k, \pi(k) < \pi(i)} \mu(J_k) - \sum_{k, k<i} \mu(J_i).\end{aligned}$$

Donc $\phi_\mu \circ f = g_\mu \circ \phi_\mu$ avec g_μ l'échange d'intervalle avec la même permutation π que f et avec pour partition la partition de $[0,1[$ définie par les coupures $a'_i = \mu([0, a_i])$.

13) On considère l'application $\Phi : \mathcal{M}(f, [0,1[) \to \Delta_r$ avec $\Delta_r := \{(x_i)_{i=1,\cdots,r},\ x_i \geq 0 \text{ et } \sum_i x_i = 1\}$ définie pour tout μ par $\Phi(\mu) = (\mu([a_{i-1}, a_i[))_{i=1,\cdots,r}$. Montrer que Φ est un homéomorphisme affine sur son image. Indications : On pourra vérifier que $((g_\mu)^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ détermine complètement ϕ_μ.

Solution: Clairement Φ est une application affine. Elle est continue car les mesures invariantes étant sans atomes la fonction $mu \mapsto \mu([a,b[)$ est continue pour tout $a < b \in [0,1[$. Montrons que Φ est injective. On a pour tout n

$$g_\mu^n(0) = \mu([0, f^n 0])$$

Puisque $(f^n(0))_n$ est dense dans $[0,1[$, $((g_\mu)^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ détermine complètement ϕ_μ, donc μ. Mais $g_\mu^n(0)$ ne dépend que de π et $(\mu([a_{i-1}, a_i[))_i$...

14) Montrer que $\Phi(\mathcal{M}(f, [0,1[)$ est d'intérieur vide dans Δ_r. En déduire que f a au plus $r-1$ mesures ergodiques.

Solution: Si $\Phi(\mathcal{M}(f, [0,1[)$ est d'intérieur non vide alors il rencontre $\mathbb{Q}^r$. Mais alors l'échange d'intervalle ϕ_μ a des coupures rationnelles, i.e. $\exists p,\ \forall i\ a_i \in \mathbb{N}/p$. Un tel échange n'est pas minimal, par exemple l'orbite de $1/2p$ est dans $\mathbb{N}/2p$ et n'est donc pas dense.

Supposons ensuite par l'absurde que f admet r mesures ergodiques distinctes, $\mu_1, \cdots, \mu_r$. Puisque les vecteurs $\Phi(\mu_i)$ vivent dans un espace affine de dimension $\leq r-2$, il existe α_i, $i = 2, \cdots, r$ avec $\sum_i \alpha_i (\Phi(\mu_i) - \Phi(\mu_1)) = 0$ et au moins deux α_i non nuls. En distinguant le signe des α_i il existe deux ensembles disjoints I, J (non vides) de $\{1, \cdots, r-1\}$ tels que

$$\sum_{i\in I} \beta_i \Phi(\mu_i) = \sum_{j\in J} \beta_j \Phi(\mu_j)$$

avec $\beta_k > 0$ pour $k \in I \coprod J$. L'application Φ étant un homéo affine, on a donc $\sum_{i\in I} \beta_i \mu_i = \sum_{j\in J} \beta_j \mu_j$. Mais ceci est impossible car les mesures ergodiques μ_k sont deux à deux orthogonales.

2 Condition de Keane et minimalité.

On dit que f satisfait **la condition de Keane** lorsque les orbites de a_i, $i = 1, \cdots, r-1$ sont infinies et disjointes.

15) Montrer que la condition de Keane entraine l'irréductibilité.

Solution: Si f est réductible, alors il existe $i \in [1, r-1]$ tel que $\pi(1, \cdots, i) = \{1, \cdots, i\}$. En particulier il existe $j \in [1, i]$ tel que $f(a_j) = a_i$. Ceci contredit la condition de Keane.

16) Supposons que f admet un point m-périodique. Montrer qu'il existe $i \in \{0, \cdots, r-1\}$ tel que $f^m a_i = a_i$. En déduire que la condition de Keane entraine l'apériodicité.

Solution: Soit x un point m-périodique. Si $a_i = \max\{a_j,\ a_j \le x\}$, alors clairement $f^m a_i = a_i$. Mais l'orbite des a_j $j = 1, \cdots, r-1$, est infini par hypothèse. Remarquez enfin que si $i = 0$ on aussi $f^m(a_1) = a_1$.

17) Soit $J = [a, b[\neq \emptyset$ fixé. On note G les extrémités gauches des composantes connexes de E_J. Montrer que pour tout $x \in G \setminus \{0\}$, on a $f(x) \in G$ (resp. $f^{-1}x \in G$) ou $x \in A(f)$ (resp. $x \in f(A(f))$).

Solution: Pour $x \in G \setminus \{0\}$, si x n'est pas dans $A(f)$, alors f est une translation au voisinage de x et $f(x)$ est donc une extrémité gauche de $f(E_J) = E_J$. On raisonne de même pour l'autre cas.

18) En déduire avec **16)** que si f satisfait la condition de Keane, on a $E_J = [0, 1[$ pour tout J.

Solution: Supposons $E_J \neq [0, 1[$ alors $G \setminus \{0\} \neq \emptyset$ Puisque G est fini et f n' a pas de point périodique pour tout $x \in G \setminus 0$ il existe $n > 0$ tel que $f^n x \in \{0\} \cup A(f)$ et $m < 0$ tel que $f^m(x) \in \{0\} \cup A(f)$. Mais f étant irréductible on a nécesseairement $f^{-1}0 \in A(f)$. Donc les orbites de $A(f)$ ne sont pas infinies disjointes.

19) Conclure que la condition de Keane entraine la minimalité.

Solution: Supposons par l'absurde que l'orbite d'un point x n'est pas dense. Elle évite donc un intervalle $J = [a, b[\neq \emptyset$. Mais pour un certain entier N on a $[0, 1[= E_J = \bigcup_{k<N} f^k J$. Pour $n > N$ on doit avoir $f^n x \notin E_J$...

3 Non mélange.

20) On suppose le système dynamique probabiliste (f, m) ergodique. Montrer avec les notations de la question **10)** que $E_J = [0, 1[$ pour tout $J = [a, b[\neq \emptyset$.

Solution:

La mesure m étant supposé ergodique, on a $\mu(E_J) = 0$ ou 1 par invariance de E_J. Mais étant donnée la forme de E_J ceci entraine $E_J = [0, 1[$ pour J non vide.

21) Pour tout $J = [a, b[\neq \emptyset$, on note P_J la partition de $[0, 1[$ en temps de retour donnée par

$$P_J := \{f^i[d_j, d_{j+1}[,\ 0 \le i < n_j,\ j = 0, \cdots, s-1\}.$$

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe $x \in [0, 1[$ avec $f^k x \neq x$ pour $k = 0, \cdots, N$. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir J tel que le diamètre de P_J est inférieur à $1/N$ et le temps de retour τ_J est supérieur à N. Puis montrer que pour tout ensemble borélien X et pour tout N, il existe J et $A \in P_J$ satisfaisant $\tau_J > N$ et $\mathrm{m}(A \Delta X) < 1/N$.

Solution: Sinon il existerait N tel que f^N soit l'identité mais alors m ne serait pas ergodique. On peut donc choisir choisir J de la forme $[x, x+\delta[$ avec δ petit de sorte que $J \cap f^k J = \emptyset$ pour $0 \le k < N$ et donc $\tau_J > N$. Puis le diamètre de P_J est toujours inférieur au diamètre de J.

Soit X est un borélien et $K \subset X$ compact avec $(X \Delta K) < 1/2N$ Si on note A_J l'union des éléments de P_J recontrant X, on a avec $J = J_N$ par convergence dominée

$$\mathrm{m}(A_{J_N} \Delta K) \xrightarrow{N} 0.$$

22) Pour tout $j = 0, \cdots s-1$ on note $\mathcal{N}([d_j, d_{j+1}[) = \{n_{i,j}, i\}$ les temps de retour dans $[d_j, d_{j+1}[\subset J$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout j on a

$$f^n[d_j, d_{j+1}[\subset \bigcup_i f^{-n_{i,j}}(f^n[d_j, d_{j+1}[).$$

En déduire que pour tout $A \in P_J$ on a

$$A \subset \bigcup_{j=0,\cdots s-1} \bigcup_i f^{-n_{i,j}} A.$$

Solution: Par définition des $n_{i,j}$ on a

$$[d_j, d_{j+1}[\subset \bigcup_i f^{-n_{i,j}}[d_j, d_{j+1}[$$

et on obtient donc le résultat en prenant l'image par f^n.

23) En déduire que $\mathrm{m}(A) \leq (r+2)^2 \mathrm{m}(A \cap f^{-n_{i,j}} A)$ pour un certain $n_{i,j}$.

Solution: On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(A) &\leq \sum_{i,j} \mathrm{m}(f^{-n_{i,j}} A), \\ &\leq rs \sup_{i,j} \mathrm{m}(f^{-n_{i,j}} A). \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $s \leq r+2$.

24) Montrer avec la Question **21**) que pour tout borélien X avec $\mathrm{m}(X) < \frac{1}{4(r+2)^2}$ on a

$$\limsup_n \mathrm{m}(X \cap f^{-n} X) > \mathrm{m}(X)^2.$$

Indications : On pourra choisir J et $A \in P_J$ tel que $\mathrm{m}(A \Delta X) < \frac{\mathrm{m}(X)^2}{4}$, en particulier $\mathrm{m}(A) \geq \frac{3}{4}\mathrm{m}(X)$.

Solution: Soit J et A comme dans l'indication. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(X \Delta f^{-n_{i,j}} X) &\geq \mathrm{m}(A \Delta f^{-n_{i,j}} A) - 2\mathrm{m}(A \Delta X), \\ &\geq \frac{\mathrm{m}(A)}{(r+2)^2} - \frac{\mathrm{m}(X)^2}{2}, \\ &\geq \frac{3\mathrm{m}(X)}{4(r+2)^2} - \frac{\mathrm{m}(X)^2}{2}, \\ &\geq (3 - 1/2)\mathrm{m}(X)^2. \end{aligned}$$

Enfin on peut choisir les temps de retour dans J et donc les $n_{i,j}$ aussi grand que l'on souhaite.

25) Conclure que (f, μ) n'est pas mélangeante pour tout $\mu \in \mathcal{M}(f, [0,1])$.

Solution: On peut supposer μ ergodique. Puis ϕ_μ est un isomorphisme de systèmes probailistes et le mélange, comme l'ergodicité, est préservé par isomorphisme. Donc il suffit de montrer que (g_μ, m) ergodique n'est pas mélangeant. On l'a montré à la question précédente.