FMA-51051-EP **X 2022**

Introduction aux systèmes dynamiques et à la théorie ergodique

Devoir Maison

On considère les applications de l'intervalle $f_\alpha : [0,1] \circlearrowleft$ avec $\alpha > 0$ définies par

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= x + 2^\alpha x^{\alpha+1} \quad \text{pour } x \in [0,1/2], \\ &= 2x - 1 \quad \text{pour } x \in]1/2, 1]. \end{aligned}$$

On note m la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et $\mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Le bassin $\mathcal{B}(\mu)$ d'une mesure de probabilité f_α-invariante μ est défini comme suit :

$$\mathcal{B}(\mu) := \left\{ x \in [0,1],\ \forall \phi \in \mathcal{C}([0,1])\ \frac{1}{n} \sum_{0 \le k < n} \phi(f_\alpha^k x) \xrightarrow{n \to +\infty} \int \phi \, d\mu \right\}$$

Le but de ce problème est de montrer le théorème suivant :

Théorème.
Avec les notations précédentes,

— si $\alpha < 1$, il existe une unique mesure de probabilité f_α-invariante ergodique μ absolument continue[1] par rapport à m et $m(\mathcal{B}(\mu)) = 1$.

— si $\alpha \geq 1$, on a $m(\mathcal{B}(\delta_0)) = 1$, où δ_0 désigne la mesure de Dirac en 0.

1 Induction et mesures invariantes

Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité et $f : X \circlearrowleft$ une application mesurable et soit $A \in \mathcal{B}$ avec $m(A) > 0$, tel que m-presque tout point de A revient dans A. On peut alors définir l'application de premier retour $f_A : A \circlearrowleft$ dans A en m-presque tout point. On note $\tau_A : A \to \mathbb{N}^*$ le temps de premier retour dans A. On suppose dans cette partie que f_A admet une mesure de probabilité invariante $\tilde{\nu} \ll m|_A$. Le système probabiliste $(A, \mathcal{B}_A, f_A, \tilde{\nu})$ est ainsi bien défini.

On pose alors

$$\nu := \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j \left(\tilde{\nu}|_{\tau_A > j} \right),$$

où $\tilde{\nu}|_{\tau_A > j}$ est la mesure restreinte à $\{\tau_A > j\}$, i.e. $\tilde{\nu}|_{\tau_A > j}(\cdot) = \tilde{\nu}\left(\cdot \cap \{\tau_A > j\}\right)$.

1) On suppose $f_* m \ll m$. Montrez que $\nu \ll m$.

1. On rappelle que si μ et ν sont deux mesures sur un même espace mesurable alors ν est dite absolument continue par rapport à μ (ce que l'on note $\nu \ll \mu$) si tout ensemble mesurable de mesure nulle pour μ est de mesure nulle pour ν.

Solution: Pour tout j on a
$$f^j_*\left(\tilde\nu|_{\tau_A>j}\right) \ll f^j_* m \ll m$$

2) Vérifiez que ν est une mesure (pas nécéssairement finie) f-invariante satisfaisant $\nu \geq \tilde\nu$.

Solution: Puisque $\tau_A > 0$ coincide avec A p.p. on a $\nu \geq \tilde\nu$. Puis
$$\begin{aligned}
\int \phi\circ f\ d\nu &= \sum_{j\geq 0}\int_{\tau_A>j} \phi\circ f^{j+1} d\tilde\nu,\\
&= \sum_{j\geq 0}\int_{\tau_A>j+1} \phi\circ f^{j+1} d\tilde\nu + \int_{\tau_A=j+1} \phi\circ f^{j+1} d\tilde\nu,\\
&= \sum_{j\geq 1}\int_{\tau_A>j} \phi\circ f^{j} d\tilde\nu + \int \phi\circ f_A\ d\tilde\nu,\\
&= \sum_{j\geq 1}\int_{\tau_A>j} \phi\circ f^{j} d\tilde\nu + \int \phi\ d\tilde\nu,\\
&= \int \phi\ d\nu.
\end{aligned}$$

3) Montrez que ν est finie si et seulement si $\int \tau_A\, d\tilde\nu < +\infty$.

Solution: $\nu(X) = \sum_{j\geq 0}\tilde\nu(\tau_A > j) = \int \tau_A\ d\tilde\nu$.

4) On suppose $\int \tau_A\, d\tilde\nu < +\infty$ et $\tilde\nu$ ergodique. Montrez que ν est ergodique.

Solution: Si $\phi\circ f = \phi$ ν pp, alors $\phi\circ f_A = \phi$ ν pp et donc $\tilde\nu$ pp. Il s'en suit que ϕ est constante $\tilde\nu$ pp.

2 Mesures invariante absolument continue pour les applications Markovienne dilatantes par morceaux

On considère dans cette partie indépendante une application $g : [0,1] \circlearrowleft$ et une partition P dénombrable de $[0,1]$ en intervalles tel que

— il existe $\alpha > 1$, tel que pour tout $B \in P$, la restriction $g|_A$ est une application C^1 avec $|(g|_B)'(x)| \geq \alpha$ pour tout $x \in B$

— pour tout $B \in P$, on a $g(B) = (0,1)$,

— il existe $c > 0$ tels que pour tout $B \in P$,
$$\forall x,y\in B,\ \log\frac{|g'(x)|}{|g'(y)|} \leq c|g(x)-g(y)|.$$

Le but de cette partie est de montrer que f admet une mesure invariante ergodique équivalente $\tilde{\nu}$ à la measure de Lebesgue telle que $\frac{1}{K} < \frac{d\tilde{\nu}}{dm} < K$ pour un certain $K > 1$.

Pour $h \in L^1(m)$, on pose

$$\forall x,\ \mathcal{L}h(x) := \sum_{g(y)=x} \frac{h(y)}{|g'(y)|}.$$

5) Montrer que $\mathcal{L}h$ définit une fonction de $L^1(m)$ et qu'on a pour tout $\phi \in L^\infty(m)$

$$\int \phi \cdot \mathcal{L}h \, dm = \int \phi \circ g \cdot h \, dm.$$

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{L}|h| \, dm &= \sum_{B \in P} \int |h \circ g|_B^{-1}(x)||g'(g|_B^{-1})(x)| \, dm(x), \\
&= \sum_{B \in P} \int_B |h(y)| \, dm(y), \\
&= \|h\|_1.
\end{aligned}$$

6) Montrer que si une fonction positive h avec $\int h \, dm = 1$ vérifie $\mathcal{L}h = h$, alors la mesure de densité h par rapport à m est g-invariante.

Solution: Toujours avec la formule de changement de variable on a pour tout $\phi \in L^\infty$:

$$\int \phi \mathcal{L}h \, dm = \int (\phi \circ g) h \, dm$$

En particulier si $\mathcal{L}h = h$, on a $\int (\phi \circ g) h \, dm = \int \phi \, dm$, i.e. hdm est g-invariante.

7) On note A_p, $p \in \mathbb{N}$, les atomes de P et g_p la restriction de g à A_p. Montrer que pour tout $i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N}$ on a pour une certaine constante $C > 0$

$$\forall i_1, \cdots, i_n, \forall x, y \in (0,1), \ \left| \frac{(g^n)' \left((g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(y) \right)}{(g^n)' \left((g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(x) \right)} \right| \leq 1 + C|x - y|.$$

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\log \left| \frac{(g^n)' \left((g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})'(y) \right)}{(g^n)' \left((g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(x) \right)} \right| &= \sum_{l=0}^{n-1} \log |g'(g^{-n+l}x)| - \log |g'(g^{-n+l}y)|, \\
&\leq c \sum_{l=0}^{n-1} |g^{-n+l+1}x - g^{-n+l+1}y|, \\
&\leq c|x-y| \sum_{l=0}^{n-1} \beta^{-l} = D|x-y|.
\end{aligned}$$

8) On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (qui peut différer de celle de la question précédente) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\mathcal{L}^n\mathbf{1} = \underbrace{\mathcal{L} \circ \cdots \circ \mathcal{L}}_{\text{n fois}}\mathbf{1}$ vérifie

$$\forall x, y,\ |\mathcal{L}^n\mathbf{1}(x) - \mathcal{L}^n\mathbf{1}(y)| \leq C|x-y|\mathcal{L}^n\mathbf{1}(x).$$

Solution:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}^n\mathbf{1}(x) - \mathcal{L}^n\mathbf{1}(y)| &\leq \sum_{i_1,\cdots,i_p} \left| \frac{1}{|(g^n)'\,(g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(x))\,|} - \frac{1}{|(g^n)'\,(g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(y))\,|} \right|, \\
&\leq \sum_{i_1,\cdots,i_p} \frac{1}{|(g^n)'\,(g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(x))\,|} \left| 1 - \frac{|(g^n)'\,(g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(x))\,|}{|(g^n)'\,(g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(y))\,|} \right|, \\
&\leq C|x-y|\mathcal{L}^n\mathbf{1}(x).
\end{aligned}$$

9) En déduire que

$$\forall x,\ \frac{1}{C+1} \leq \mathcal{L}^n\mathbf{1}(x) \leq 1 + C.$$

Solution: D'après la question précédente, on a pour tout x, y :

$$\mathcal{L}^n\mathbf{1}(y) \leq \mathcal{L}^n\mathbf{1}(x) + C\mathcal{L}^n\mathbf{1}(x)$$

En intégrant par rapport à y (resp. x), on obtient le résultat voulu car $\int \mathcal{L}^n\mathbf{1}\, dm = 1$.

10) Montrer alors avec le théorème d'Ascoli que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} \mathcal{L}^n\mathbf{1}\right)_n$ admet une sous-suite qui converge uniformément.

Solution: D'après 9 et 10, la suite considérée est bornée et équicontinue. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli.

11) En déduire que g admet une mesure invariante équivalente $\tilde{\nu}$ à la measure de Lebesgue telle que $\frac{1}{K} < \frac{d\tilde{\nu}}{dm} < K$ pour un certain $K > 1$.

Solution: Tout point d'accumulation h de la suite est par ailleurs une fonction positive $\mathcal{L}$-invariante. On conclut facilement avec 6.

12) Montrer que la mesure $\tilde{\nu}$ ainsi obtenue est ergodique. Indications : on pourra considérer un point de densité de Lebesgue d'un ensemble invariant et raisonner comme pour l'application de Gauss.

Solution: Soit E un ensemble invariant et x un point de densité de E. On note $I_n(x)$ la branche monotone de g^n contenant x. Le controle de la distorsion en 7 donne :

$$C Leb([0,1] \setminus E) \leq \frac{Leb(I_n(x) \setminus E)}{Leb(I_n(x))} \xrightarrow{n} 0$$

3 Cas $\alpha < 1$

On notera $f = f_\alpha$. On définit par récurrence la suite $(z_n)_n$ par $z_{-1} = 1$, $z_0 = 1/2$ et $z_{n+1} \in [0, 1/2]$ avec $f(z_{n+1}) = z_n$. On pose aussi $A =]1/2, 1]$. On notera f_A l'application de premier retour pour f dans A, i.e. $f_A := f^{\tau_A} : A \circlearrowleft$.

13) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \{\tau_A = n\} = \left] \frac{z_{n-1}+1}{2}, \frac{z_{n-2}+1}{2} \right].$$

14) Montrer qu'il existe $a > 0$ telle que $z_n \sim^n a n^{-1/\alpha}$.

Solution: On a $z_n = z_{n+1} + 2^{\alpha+1} z_{n+1}^{\alpha+1}$. La suite $(z_n)_n$ décroit donc vers 0 et on vérifie facilement que

$$\frac{1}{z_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{z_n^\alpha} \xrightarrow{n} a := \alpha 2^{\alpha+1}$$

On conclut que $z_n \sim^n (an)^{-1/\alpha}$.

15) En déduire que $\int_A \tau_A \, dm < +\infty$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Solution: On a $\{\tau_A > n\} =]1/2, (z_n + 1)/2]$ et donc

$$\int \tau_A \, dm = \sum_n m(\tau_A > n) = \sum_n z_n$$

Cette dernière série converge ssi $\alpha < 1$.

16) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n, \ \forall x, y \in \{\tau_A = n\}, \ \left| \frac{(f^n)'(x)}{f^n)'(y)} \right| \leq C$$

Solution: $f' = 2$ sur A et $f' \geq 1$ sur $[0, 1]$. On en déduit que $g' \geq 2$. Vérifions le dernier point : pour $x, y \in \{\tau_A = n\}$ on a $f^l x, f^l y \in [z_{n-l}, z_{n-l-1}[$. Pour u dans cet intervalle on a

$f''(u)/f'(u) \leq 2^{\alpha+2}u^{\alpha-1} \leq Cz_{n-l}^{\alpha-1}$. Donc

$$\begin{aligned}
\log(f^n)'(x) - \log(f^n)'(y) &= \sum_{l=0}^{n-1} \log f'(f^l x) - \log f'(f^l y), \\
&\leq \sum_{l=0}^{n-1} Cz_{n-l}^{\alpha-1}|f^l x - f^l y|, \\
&\leq \sum_{l=0}^{n-1} Cz_{n-l}^{\alpha-1}|z_{n-l} - z_{n-l-1}|, \\
&\leq \sum_{l=0}^{n-1} C' z_{n-l}^{\alpha-1} z_{n-l}^{\alpha+1}, \\
&\leq \sum_{l=0}^{n-1} C' z_{n-l}^{2\alpha},
\end{aligned}$$

Mais $z_n^{2\alpha} \sim^n a'n^{-2}$.

17) Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $x', y' \in \{\tau_A = l\}$, on a

$$\frac{|x' - y'|}{m(\{\tau_A = l\})} \leq 2C|f^l x' - f^l y'|.$$

Solution: On intègre 16 avec $n = l$ par rapport à x sur $\{\tau_A = l\}$ puis par rapport à y sur $[x', y']$.

18) Montrer que $g = f_A$ satisfait les conditions de la partie 2 lorsque $\alpha < 1$. On notera $\tilde{\nu}$ la mesure associée.

Solution: On cherche à appliquer la partie 2 avec $g = f_A$ et P la partition $(\{\tau_A = n\})_n$. L'unique point délicat à vérifier est

$$\forall x, y \in \{\tau_A = n\},\ \log|(f^n)'(x)| - \log|(f^n)'(y)| \leq c|f^n(x) - f^n(y)|$$

En considerant $x', y' = f^l x, f^l y \in \{\tau_A = n - l\}$ dans l'inégalité précedente, on obtient

$$\frac{|f^l x - f^l y'|}{m(\{\tau_A = n - l\})} \leq 2C|f^n x - f^n y|.$$

En réinjectant cette inégalité dans le calcul de 16, on obtient

$$\begin{aligned}\log(f^n)'(x) - \log(f^n)'(y) &\leq \sum_{l=0}^{n-1} C z_{n-l}^{\alpha-1} |f^l x - f^l y|, \\ &\leq C z_{n-l}^{\alpha-1} m(\{\tau_A = n-l\}) |f^n x - f^n y|, \\ &\leq \sum_{l=0}^{n-1} C z_{n-l}^{\alpha-1} |z_{n-l} - z_{n-l-1}| |f^n x - f^n y|, \\ &\leq \sum_{l=0}^{n-1} C' z_{n-l}^{2\alpha} |f^n x - f^n y|, \\ &\leq c |f^n(x) - f^n(y)|.\end{aligned}$$

19) Déduire des questions précédentes le premier item du théorème (cas $\alpha < 1$).

Solution: Soit $\tilde{\nu}$ donnée par la partie 2. D'après la partie 1 la mesure ν associée est ergodique et absolument continue.

4 Cas $\alpha \geq 1$

On suppose désormais $\alpha \geq 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = [0, z_k]$. Pour $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère $s = s(n,x)$ l'entier (s'il existe) tel que $\sum_{t=0}^{s} \tau_A(f_A^t x) < n \leq \sum_{t=0}^{s+1} \tau_A(f_A^t x)$. On pose également

$$N_s(l,x) := \sharp\{0 \leq t < s,\ \tau_A(f_A^t x) = l+1\}.$$

20) Montrez que

$$\sharp\{0 \leq p < n,\ f^p x \notin U_k\} \leq (k+1)(s+2).$$

Solution: Entre deux temps de retour consécutifs dans A on visite au plus k fois $[z_k, 1/2]$. En effet si $y \in [z_k, 1/2]$, il existe $0 < l \leq k$ tel que $f^l y \in A$.

21) En déduire que

$$\frac{1}{n}\sharp\{0 \leq p < n,\ f^p x \notin U_k\} \leq \frac{(k+1)(s+2)}{\sum_l (l+1) N_s(l,x)}.$$

Solution: Il suffit de remarquer que $n \geq \sum_l (l+1) N_s(l,x)$.

22) On rappelle que $\tilde{\nu}$ désigne la mesure donnée par la partie 2 (question 11) pour la fonction $g = f_A$. Montrez qu'il existe $E \subset A$ with $m(E) = m(A)$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $l \in E$,

$$\frac{N_s(l,x)}{s} \xrightarrow{s} \tilde{\nu}\left(\{\tau_A = l+1\}\right).$$

Solution: On applique le théorème ergodique à $(A, f_A, \tilde{\nu})$ pour l'observable $\chi_{\{\tau_A = l+1\}}$. Remarquez enfin que $m|_A$ et $\tilde{\nu}$ sont equivalentes.

23) En déduire que pour $x \in E$ et tout k,

$$\frac{1}{n}\sharp\{0 \leq p < n,\ f^p x \notin U_k\} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Solution: Pour $x \in E$ l'entier $s(n,x)$ tends vers l'infini, alors

$$\begin{aligned}
\limsup_n \frac{1}{n}\sharp\{0 \leq p < n,\ f^p x \notin U_k\} &\leq \lim_L \limsup_s \frac{(k+1)(s+2)}{\sum_{l<L}(l+1)N_s(l,x)}, \\
&\leq \lim_L \frac{k}{\sum_{l<L}(l+1)\tilde{\nu}(\{\tau_A = l+1\})}, \\
&\leq \frac{k}{\int \tau_A \, d\tilde{\nu}}.
\end{aligned}$$

24) Conclure le cas $\alpha \geq 1$ du théorème.

Solution: Dans ce cas on a $\int \tau_A \, dm = \infty$ et donc aussi $\int \tau_A \, d\tilde{\nu} = \infty$ car $\frac{d\tilde{\nu}}{dm} > 1/K$. La question précédente entraine que tout $x \in E$ est dans le bassin de δ_0. Enfin on remarque que $E \cup \bigcup_k \left([z_{k+1}, z_k[\cap f^{-k}E\right)$ est de mesure totale et est aussi inclus dans le bassin de δ_0.