

Introduction aux systèmes dynamiques et à la théorie ergodique

Devoir Maison

On note $\mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des difféomorphismes locaux du cercle $\mathbb{T}^1$ dans lui-même muni de la topologie $\mathcal{C}^1$ associée à la distance¹ $d_{\mathcal{C}^1}(T, S) = \sup_{x \in \mathbb{T}^1} |Tx - Sx| + \sup_{x \in \mathbb{T}^1} |T'(x) - S'(x)|$. On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$. On rappelle qu'une mesure borélienne μ sur $\mathbb{T}^1$ est absolument continue (ce que l'on note $\mu \ll m$) si tout borélien de m -mesure nulle est aussi de μ -mesure nulle. Le but de ce problème est de montrer le résultat suivant :

Théorème.

Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense $\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$ tel que tout $T \in \mathcal{E}$ n'admet pas de mesure de probabilité invariante absolument continue (m.i.a.c. en abrégé).

1 Caractérisation de l'absence d'm.i.a.c.

Soit T un difféomorphisme local de $\mathbb{T}^1$. Pour tout $\epsilon > 0$ on note H_ϵ l'hypothèse suivante :

(H_ϵ) : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact $K \subset \mathbb{T}^1$ et un entier positif k tel que

$$m(K) > 1 - \epsilon \text{ et } m(T^k K) < \epsilon$$

- 1) Montrer que si T admet une m.i.a.c. , alors (H_ϵ) n'est pas vérifié pour un certain $\epsilon > 0$.

Solution: Soit μ une m.i.a.c. Il existe $1/2 > \epsilon > 0$ tel que tout borélien A avec $m(A) < \epsilon$ vérifié $\mu(A) < 1/2$. Montrons que (H_ϵ) n'est pas satisfait : si K est un compact avec $m(T^k K) < \epsilon$, on a

$$\mu(\mathbb{T}^1 \setminus K) = 1 - \mu(K) \geq 1 - \mu(T^k K) > 1/2,$$

$$\text{donc } m(\mathbb{T}^1 \setminus K) > \epsilon.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la première partie que T n'admet pas d'm.i.a.c.

- 2) Montrer que toute mesure limite μ de $(\frac{1}{n} \sum_{k < n} T^k m)_n$ est singulière.

1. par abus de notations on a noté $|Tx - Sx|$ la distance entre Tx et Sx sur le cercle et $T'x$ pour la dérivée en x d'un relevé de T à $\mathbb{R}$.

Solution: On décompose μ en sa partie singulière et sa partie absolument continue :

$$\mu = \mu_{\text{sing}} + \mu_{\text{abs}}$$

avec $\mu_{\text{sing}} \perp m$ et $\mu_{\text{abs}} \ll m$. Puisque T est un difféo local, on a $T_*m \equiv m$. En particulier μ_{sing} et μ_{abs} sont aussi invariantes et par hypothèse il suit $\mu = \mu_{\text{sing}}$.

- 3) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact L et un entier positif k , tel que $m(T^{-k}L) < \epsilon/2$ et $m(L) > 1 - \epsilon$.

Solution: μ étant singulière, il existe un compact L tel que $m(L) > 1 - \epsilon$ et $\mu(L) = 0$. Mais $\mu(L) \geq \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} m(T^{-k}L)$. En particulier on a $m(T^{-k}L) < \epsilon/2$ pour un certain $k > 0$.

- 4) Conclure que (H_ϵ) est satisfait pour tout $\epsilon > 0$.

Solution: Toujours par régularité de la mesure, il existe un compact $K \subset \mathbb{T}^1 \setminus T^{-k}L$ avec $m(K) > m(\mathbb{T}^1 \setminus T^{-k}L) - \epsilon/2 > 1 - \epsilon$. Puis $m(T^k K) \leq m(\mathbb{T}^1 \setminus L) = 1 - m(L) < \epsilon$.

2 Partitions dynamiques

On considère un espace métrique compact X muni d'une mesure de proba borélienne que l'on note aussi m , ainsi qu'une application continue $T : M \rightarrow M$ avec $T_*m \ll m$ et $m(\text{Per}(T)) = 0$.

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Théorème.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $n > k$ et un borélien $U \subset M$ tel que

- $T^{-l}U$, $0 \leq l < n$, sont disjoints deux à deux,
- $m\left(\bigcup_{l=0, \dots, n-1} T^{-l}U\right) > 1 - \epsilon$,
- $m\left(\bigcup_{l=0, \dots, k} T^{-l}U\right) < \epsilon$.

Pour un entier positif n , un sous-ensemble A de X est appelé **n -libre** si les ensembles $T^{-l}A$, $l = 0, \dots, n-1$ sont deux à deux disjoints. Pour $A \subset X$ on note aussi

$$\overline{A} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} T^{-l}A$$

- 5) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit O un voisinage ouvert de $\text{Per}_n(T)$. Montrer qu'il existe un recouvrement fini $(U_i)_{1 \leq i < N}$ de $X \setminus O$ par des boules n -libres.

Solution: Tout $x \notin \text{Per}_n(T)$ admet un voisinage ouvert V_x tel que $T^{-l}V_x$, $0 \leq l \leq n$, sont disjoints deux à deux. On extrait alors un recouvrement fini de $(V_x)_{x \in X \setminus O}$ pour le compact $X \setminus O$.

- 6) Soient $A, B \subset X$ des ensembles n -libres. Montrer que

$$C = (A \setminus \overline{B}) \cup \left(B \setminus \overline{(A \setminus \overline{B})} \right)$$

est n -libre.

Solution: Posons $C_1 = A \setminus \overline{B}$ et $C_2 = B \setminus \overline{(A \setminus \overline{B})}$. Les ensembles C_i sont n -libres et si l'union n'est pas n -libre, alors on a $f^{-k}C_1 \cap C_2$ ou $f^{-k}C_2 \cap C_1$ pour un certain $0 \leq k < n$. Mais c'est impossible par définition.

- 7) Vérifier que $A \cup B \subset \overline{C}$.

Solution: Pour des ensembles E et F on vérifie facilement que

$$\overline{(E \setminus \overline{F}) \cup F} = \overline{E \cup F}$$

En appliquant ceci à deux reprises on obtient $\overline{A \cup B} = \overline{C}$.

- 8) Montrer qu'il existe V n -libre et $\overline{V} \supset X \setminus O$.

Solution: On définit par récurrence $C_1 = U_1$ puis $C_i = (C_{i-1} \setminus \overline{U_i}) \cup \left(U_i \setminus \overline{(C_{i-1} \setminus \overline{U_i})} \right)$ pour tout $i > 1$. Alors C_N est n -libre et $\overline{C_N}$ contient $\bigcup_i O_i \supset X \setminus O$.

- 9) Montrer que pour tout $\epsilon' > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble n -libre W tel que $m(T^{-2n}\overline{W}) > 1 - \epsilon'$.

Solution: Soit $W = V$ comme dans la question précédente. Puisque $m(\text{Per}_n) = 0$ et $T_*m \ll m$ on peut prendre O un voisinage de Per_n tel que $m(X \setminus T^{-2n}O) > 1 - \epsilon'$.

- 10) Montrer que pour tout $\epsilon' > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble n -libre W tel que $m(T^{-2n}\overline{W}) > 1 - \epsilon'$ et $m(W) < \epsilon'$.

Solution: Soit W comme dans la question précédente. On peut supposer $n > 1/\epsilon'$. Les ensembles $T^k W$, $0 \leq k < n$ étant disjoints, on a pour un certains k que $m(T_k W) < \epsilon'$. Il suffit alors de prendre $W' = T^k W$ car $\overline{W'} \supset \overline{W}$.

- 11) Conclure la preuve du Théorème. *Indications :* On pourra considérer les ensembles $E_K := \bigcup_{l=K[\text{mod } n], l \geq n} \{\tau_W = l\}$ pour $0 \leq K < n$ avec $\tau_W(x) = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, T^k x \in W\}$.

Solution: Soient k et ϵ fixés. Il existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(k)$ tel que $[m(A) < \epsilon_1] \Rightarrow [m(\bigcup_{0 \leq l < k} T^{-l} A)] < \epsilon$. Soit $n > 1/\epsilon_1(k)$. On choisit $\epsilon' < \epsilon/2$ tel que $[m(A) < \epsilon'] \Rightarrow [m(\bigcup_{0 \leq l \leq 2n} T^{-l} A)] < \epsilon/2$. Soit W comme dans la question précédente pour n et ϵ' . Pour $x \in \overline{W}$ on pose $\tau_W(x) = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, T^k x \in W\}$. Pour $0 \leq K < n$ on considère

$$E_K := \bigcup_{l=K[n], l \geq n} \{\tau_W = l\}.$$

Alors pour tout K , l'ensemble $U = E_K$ est n -libre. Par ailleurs les ensembles E_K étant disjoints, il existe un K tel que $m(E_K) \leq 1/n \leq \epsilon_1$. Par définition de ϵ_1 on a $m(\bigcup_{0 \leq l < k} T^{-l} E_K) < \epsilon$. De plus $T^{-2n} \overline{W} \subset (\bigcup_{0 \leq l < n} T^{-l} E_K) \cup (\bigcup_{l \leq 2n} T^{-l} W)$. Par définition de W et ϵ' on a $m(\bigcup_{l \leq 2n} T^{-l} W) < \epsilon/2$. Donc $m(\bigcup_{0 \leq l < n} T^{-l} E_K) > 1 - \epsilon$.

- 12) Montrer que l'on peut supposer que U est un compact, puis un ouvert.

Solution: Par régularité de la mesure et absolue continuité de T on peut supposer que $U = K$ est un compact. Puis par compacité de $T^l K$ on peut trouver un voisinage ouvert de K satisfaisant encore les conditions requises.

- 13) On suppose que T est un difféomorphisme local de $\mathbb{T}^1$. Expliquer pourquoi on peut pour tout $\eta > 0$ choisir $U = U_\eta$ comme une union fini d'intervalles fermés (non triviaux) tel que pour tout $0 \leq l < n - 1$ toute composante connexe de $T^{-l-1}U$ est de diamètre inférieure à η et est envoyé bijectivement sur une composante connexe de $T^{-l}U$.

Solution: Tout d'abord on peut supposer que U a un nombre fini de composantes connexes quitte à réduire un peu la mesure de U . Il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{T}^1$, l'application T envoie bijectivement $B(x, \eta)$ sur son image. On peut supposer $\eta < \eta_0$. Alors on peut enlever à U un petit voisinage ouvert de l'ensemble fini $\bigcup_{0 \leq l < n} T^l E$ avec $E = \{l\eta, 0 \leq l \leq 1/\eta\} \subset \mathbb{T}^1$. Le nouveau fermé obtenu satisfait les conditions requises.

3 Perturbation

Soit $T \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$. Soient k, n, η, ϵ et $U = U_\eta$ comme dans la question précédente (on supposera $\epsilon < 1/2$). Pour tout arc de cercle $I = (c - a, c + a)$, où $1/2 > a > 0$ et $c \in \mathbb{T}^1$, on note I_ϵ l'arc de cercle $(c - a(1 - \epsilon), c + a(1 - \epsilon))$. On note K l'union des I_ϵ pour I composante connexe de $T^{-l}U$ pour $k < l < n$.

- 14) Montrer que $m(K) \geq (1 - 2\epsilon)(1 - \epsilon)$.

Solution: Cela vient des deux faits suivants :

- $m(I_\epsilon) = (1 - \epsilon)m(I)$,
- $m(K) \geq m(\bigcup_{k < l < n} T^{-l}U) \geq 1 - 2\epsilon$.

- 15) Pour $\beta \in]0, 1[$ montrer qu'il existe une fonction $\tilde{T} = T_{\epsilon, \eta, \beta} \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$ tel que
- $\tilde{T}$ envoie I (resp. affinement I_ϵ) sur TI (resp. $(TI)_{\beta\epsilon}$) pour toute composante connexe I de $T^{-l}U$, $0 \leq l < n$,
 - $\tilde{T} = T$ en dehors de $\bigcup_{0 \leq l < n} T^{-l}U$,
 - $d_{\mathcal{C}_1}(T, \tilde{T}) < \eta + \sup_{|x-y| < \eta} |T'(x) - T'(y)| + 2 \frac{(1-\beta)(1-\epsilon)}{\epsilon} \sup_x |T''(x)|$.

Solution: On peut tout d'abord choisir $\tilde{T}$ continue affine par morceaux satisfaisant les deux premières conditions. La pente sur $I \setminus I_\epsilon$ est égale à $\frac{1-\beta(1-\epsilon)}{\epsilon} \frac{|TI|}{|I|}$ et celle sur I_ϵ à $\frac{\beta|TI|}{|I|}$. Or $\frac{|TI|}{|I|}$ est égal à $|T'(x)|$ pour un certain $x \in I$. Par conséquent on a pour tout $y \in I$ (observez que $1 - \beta < \frac{(1-\beta)(1-\epsilon)}{\epsilon}$)

$$\begin{aligned} |\tilde{T}'(y) - T'y| &\leq |T'x - T'y| + |T'x - \tilde{T}'y|, \\ &\leq |T'x - T'y| + \frac{(1-\beta)(1-\epsilon)}{\epsilon} |T'x|, \\ &\leq \sup_{|u-v|<\eta} |T'u - T'v| + \frac{(1-\beta)(1-\epsilon)}{\epsilon} \sup_w |T'w|. \end{aligned}$$

On peut alors lisser sur $I \setminus I_\epsilon$ pour obtenir une application (C^∞ si l'on veut) $\tilde{T}$ arbitrairement proche en topologie $\mathcal{C}^1$ (mais pas $\mathcal{C}^2$).

- 16) Montrer que $m(\tilde{T}^k K) \leq \beta^k m(U)$.

Solution: Si I est une composante connexe de $f^{-l}U$, pour $l \geq k$ alors $T^k I$ est une composante connexe de $T^{k-l}U$ et l'ensemble $\tilde{T}^k I_\epsilon$ est égale à $(T^k I)_{\beta^k \epsilon}$.

4 Conclusion

- 17) Soit K un compact de I et $(T_n : \mathbb{T}^1 \curvearrowright)_n$ une suite d'applications continues convergeant uniformément vers T . Montrer que

$$m(TK) \geq \limsup_n m(T_n K).$$

Solution: Notons $(TK)^\epsilon$ le ϵ -voisinage ouvert de TK . Pour n assez grand on a $T_n K \subset (TK)^\epsilon$. Donc pour tout $\epsilon > 0$, on a $\limsup_n m(T_n K) \leq m((TK)^\epsilon)$ mais TK étant fermé, on a $\chi_{TK} = \lim_\epsilon \chi_{(TK)^\epsilon}$. Par convergence dominée on conclut que $\limsup_n m(T_n K) \leq \lim_\epsilon m((TK)^\epsilon) = m(TK)$.

- 18) Montrer que

$$\mathcal{E}^\epsilon := \{T \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1), \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \exists K \subset \mathbb{T}^1 \text{ compact} : m(K) > 1 - \epsilon \text{ et } m(T^k K) < \epsilon\}$$

est un ouvert de $\mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$.

Solution: Soit $T \in \mathcal{E}^\epsilon$ et K les données associées. D'après la question précédent, il existe un $\mathcal{C}^0$ -voisinage de T tel que pour tout S dans ce voisinage, on a $m(S^k K) < \epsilon$.

- 19) **Bonus :** Montrer que $\{T \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1), m(\text{Per}(T)) = 0\}$ est dense dans $\mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$.

Solution: En fait, l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des difféos locaux du cercle ayant un nombre fini de points n -périodiques contient un ouvert dense. Par le théorème de Baire, il existe alors un ensemble dense avec un nombre dénombrable (donc de mesure nulle) de points périodiques.

Clairement $\{f \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1), |(f^n)'(x)| \neq 1 \ \forall x \in \text{Per}_n(f)\}$ est un ouvert inclut dans $\mathcal{E}_n$. Pour montrer qu'il est dense on peut tout d'abord approcher un difféomorphisme local g par une application $\tilde{g}$ affine par morceaux telle que les $\prod_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| \neq 1$ pour toute famille à n éléments des pentes de $\tilde{g}$ et que les extrémités de la partition en morceaux ne soit pas des points n -périodiques. Puis on peut lisser $\tilde{g}$ aux singularités en une fonction $\tilde{\tilde{g}} \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$.

- 20) Montrer à l'aide des parties précédentes et du résultat de la question Bonus ci-dessous que $\mathcal{E}^\epsilon$ est dense.

Solution: On fixe $\epsilon' > 0, \eta' > 0$. Soit $T \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$. D'après la question précédente on peut supposer $m(\text{Per}(T)) = 0$. Montrons qu'il existe $S \in \mathcal{E}_{\epsilon'}$ avec $d_{C^1}(S, T) < \eta'$. On prend $1 > \epsilon > 0$ tel que $(1 - 2\epsilon)(1 - \epsilon) > 1 - \epsilon'$. Puis on prend $0 < \beta < 1$ tel que $2 \frac{(1-\beta)(1-2\epsilon)}{2\epsilon} \sup_x |T'(x)| < \eta'/3$. On choisit alors k avec $\beta^k < \epsilon'$ et $\eta < \eta'/3$ tel que $\sup_{|x-y| < \eta} |T'(x) - T'(y)| < \eta'/3$. La partie 1 nous donne n et U_η . Le compact K et l'application $\tilde{T}$ de la partie précédente vérifie alors $d_{C^1}(T, \tilde{T}) < \eta'$ et $m(K) > 1 - \epsilon', m(\tilde{T}^k K) < \epsilon'$. Donc $\tilde{T} \in \mathcal{E}^\epsilon$.

- 21) Conclure la preuve du Théorème.

Solution: Il suffit de prendre $\mathcal{E} = \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q} \cap]0,1[} \mathcal{E}_\epsilon$.