CONTROLE MAT551 - 2017 - DURÉE 3H

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

La qualité de la rédaction sera un facteur important de l'appréciation des copies.

1 Ensemble de rotation sur le tore $\mathbb{T}^2$

On considère un homéomorphisme f du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui admet un relevé $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfaisant $F(z+v) = F(z) + v$ pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ et tout $v \in \mathbb{Z}^2$. On définit

$$\rho(F) := \bigcap_n \overline{\bigcup_{p \geq n} \rho_p(F)} \text{ avec } \rho_p(F) := \left\{ \frac{F^p(z) - z}{p}, \ z \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On note ϕ_F la fonction induite sur le tore par la fonction $\mathbb{Z}^2$-périodique $z \mapsto F(z) - z$ puis on pose pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)$

$$\rho(\mu, F) := \int_{\mathbb{T}^2} \phi_F(z) \ d\mu(z).$$

(1) Soit $\mu \in \mathcal{M}_e(\mathbb{T}^2, f)$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{F^n(z) - z}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} \rho(f, \mu).$$

D'après le Théorème ergodique ponctuel, on a pour μ-presque tout $z \in \mathbb{T}^2$:

$$\frac{F^n(z) - z}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi_F(f^k z) \xrightarrow{n} \int_{\mathbb{T}^2} \phi_F(z) \ d\mu(z).$$

(2) Soit $\alpha \in \rho(F)$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)$ tel que $\alpha = \rho(F, \mu)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on pourra écrire $\frac{F^n(x) - x}{n}$ sous la forme $\int_{\mathbb{T}^2} \phi_F(z) \ d\mu_x(z)$ pour une certaine mesure de probabilité atomique μ_x.

Soit $(n_k)_k$ une suite croissante d'entiers et $(x_k)_k$ une suite d'éléments du tore telles que $\frac{F^{n_k}(x_k) - x_k}{n_k} \xrightarrow{k} \alpha$. On a pour tout k

$$\frac{F^{n_k}(x_k) - x_k}{n_k} = \int_{\mathbb{T}^2} \phi_F(z) \ d\mu_k(z)$$

avec $\mu_k := \frac{1}{n_k} \sum_{l=0}^{n_k - 1} \delta_{f^l x_k}$. Puis toute limite faible μ de $(\mu_k)_k$ est f-invariante et vérifie $\int_{\mathbb{T}^2} \phi_F(z) \ d\mu(z) = \lim_k \int \phi_F(z) \ d\mu_k(z) = \alpha$ par continuité de ϕ_F.

(3) On admet que $\rho(F)$ est un ensemble convexe. En déduire que

$$\rho(F) = \{\rho(\mu, F), \ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)\}.$$

La question précédente donne l'inclusion $\rho(F) \subset \{\rho(\mu, F), \ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)\}$. L'application $\mu \mapsto \rho(\mu, F) = \int \phi_F \ d\mu$ est affine et continue. Si M_μ désigne la décomposition ergodique de $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)$, on a $\rho(\mu, F) = \int_{\mathcal{M}_e(\mathbb{T}^2, f)} \rho(\nu, F) \ dM_\mu(\nu)$. Pour une partition borélienne finie α de $\mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)$ on a $\int_{\mathcal{M}_e(\mathbb{T}^2, f)} \rho(\nu, F) \ dM_\mu(\nu) = \sum_{A \in \alpha} M_\mu(A) \int_A \rho(\nu, F) \ dM_\mu|_A(\nu)$ et pour un diamètre de α assez petit on a $\int_A \rho(\nu, F) \ dM_\mu|_A(\nu) \sim \rho(\xi, F)$ pour tout $A \in \alpha$ et tout $\xi \in \mathcal{M}_e(\mathbb{T}^2, f) \cap A$. Par conséquent

$$\{\rho(\mu, F), \ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)\} \subset \overline{conv(\{\rho(\nu, F), \ \nu \in \mathcal{M}_e(\mathbb{T}^2, f)\})}.$$

D'après la question 1, on a $\rho(\nu, F) \in \rho(F)$ pour tout $\nu \in \mathcal{M}_e(\mathbb{T}^2, f)$. Par convexité et compacité de $\rho(F)$ on conclut que

$$\{\rho(\mu, F), \ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)\} \subset \overline{conv(\rho(F))} = \rho(F).$$

(4) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue $\mathbb{Z}$-périodique et soit f la dynamique sur $\mathbb{T}^2$ induite par $F : (x, y) \mapsto (x + \phi(y), y)$. Déterminer l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes f- invariantes ergodiques. Calculer $\rho(F)$.

Les cercles $C_y := \mathbb{S}^1 \times \{y\}$ sont invariants, et $f|_{C_y}$ est une rotation d'angle $\phi(y)$. Les mesures ergodiques sont donc $Leb \times \delta_y$ pour $\phi(y) \notin \mathbb{Q}$ et $\left(\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \delta_{x+l/q}\right) \times \delta_y$ avec $x \in \mathbb{S}^1$ pour $\phi(y) = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. Puis on a $\rho(F) = \phi(\mathbb{R}) \times \{0\}$.

2 Solenoïde

Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. Pour $0 < \lambda < 1/2$ on considère la dynamique suivante sur le tore plein $\mathbb{S}^1 \times D$ de $\mathbb{R}^3$

$$\forall \theta \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \forall (x, y) \in D, \qquad F(\theta, x, y) = \left(2\theta, \lambda x + \frac{1}{2}\cos(2\pi\theta), \lambda y + \frac{1}{2}\sin(2\pi\theta)\right).$$

Le compact $\mathcal{S} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^n(\mathbb{S}^1 \times D)$ s'appelle le solénoïde.

(1) Montrer que $(\mathcal{S}, F)$ définit un système dynamique topologique inversible. On pourra vérifier que F est injective sur $\mathbb{S}^1 \times D$.

Clairement $F(\mathbb{S}^1 \times D) \subset \mathbb{S}^1 \times D$ et donc $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. Montrons que F est injective sur $\mathbb{S}^1 \times D$:

$$\begin{aligned} & F(\theta, x, y) = F(\theta', x', y'), \\ \Leftrightarrow \quad & \theta = \theta', x = x', y = y' \text{ ou} \\ & \theta = \theta' + 1/2, \lambda(x - x') = -\cos(2\pi\theta), \lambda(y - y') = -\sin(2\pi\theta). \end{aligned}$$

Mais les conditions $0 < \lambda < 1/2$ et $(x - x')^2 + (y - y')^2 \leq 4$ rendent ce second cas impossible, d'où l'injectivité. Vérifions la surjectivité. Soit $(\theta, x, y) \in \mathcal{S}$. Pour tout entier $n > 0$ il existe (θ_n, x_n, y_n) tel que $F^n(\theta_n, x_n, y_n) = (\theta, x, y)$. Il suffit de voir que (θ_1, x_1, y_1) appartient à $\mathcal{S}$. Or $F\left(F^{n-1}(\theta_n, x_n, y_n)\right) = F(\theta_1, x_1, y_1) = (\theta, x, y)$. Donc par injectivité de F on a $F^{n-1}(\theta_n, x_n, y_n) = (\theta_1, x_1, y_1)$ pour tout $n > 0$ et donc $(\theta_1, x_1, y_1) \in \mathcal{S}$.

(2) On considére le sous-ensemble Y de $(\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$ défini par

$$Y := \{(\theta_n)_n \in (\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}, \quad \theta_n = 2\theta_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

Vérifier que pour $(\theta_n)_n \in Y$, l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^n(\theta_n \times D)$ est un singleton.

On a $\bigcap_{0\leq k\leq n} F^k(\theta_k \times D) \subset \{\theta_0\} \times G_1 \circ G_2 \circ \cdots \circ G_n(D)$ avec $G_k = F(\theta_k, \cdot) : D \to D$ pour $k = 1, ..., n$. Les applications G_k étant λ-contractantes, on en déduit que le diamètre de $\bigcap_{0\leq k\leq n} F^k(\theta_k \times D)$ est inférieur à $2\lambda^{-n}$.

(3) On considère le système topologique (Y, α) défini pour tout $\Theta = (\theta_n)_n \in Y$ par $\alpha(\Theta) = (2\theta_0, \theta_0, \theta_1, ...)$. On note ϕ la projection de $\mathbb{S}^1 \times D$ sur la première coordonnée, i.e. $\phi : (\theta, x, y) \mapsto \theta$. Montrer que $\pi : z \mapsto \left(\phi(F^{-k}z)\right)_{k\geq 0}$ définit une conjugaison topologique de $(\mathcal{S}, F)$ vers (Y, α).

On vérifie facilement que $\alpha \circ \pi = \pi \circ F$. L'inverse de π est donnée par $(\theta_n)_n \mapsto \bigcap_n F^n(\theta_n \times D)$.

(4) Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en arcs de longueur inférieur à 1/2. Montrer que les ouverts de Y donnés par $\{(\theta_n)_n \in Y, \ \theta_0 \in U\}$ pour $U \in \mathcal{U}$ forment un générateur topologique $\mathcal{V}$ de (Y, α). En déduire que $(\mathcal{S}, F)$ est expansif.

L'application $\pi' : Y \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ donnée par la projection sur la première coordonnée semi-conjugue (Y, α) au doublement de l'angle $\theta \mapsto 2\theta$ sur le cercle et $\mathcal{V} = \pi'^{-1}\mathcal{U}$. Par conséquent tout élément de $\bigvee_{k=-n}^{n} \alpha^{-k}\mathcal{V}$ est inclus dans un élément de la forme $U_1^n \times U_2^n \times U_n^n \times (\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$ avec $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}^n$. Or $\mathcal{U}$ est un générateur topologique de $\mathcal{U}$ donc le diamètre de $\mathcal{U}^n$ puis celui de $\bigvee_{k=-n}^{n} \alpha^{-k}\mathcal{V}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Le recouvrement $\mathcal{V}$ est alors un générateur topologique de (Y, α), qui est donc expansif. Par conjugaison topologique il en est de même de $(\mathcal{S}, F)$.

(5) Montrez que l'entropie topologique de $(\mathcal{S}, F)$ est égale à $\log 2$. On rappelle que c'est le cas du doublement de l'angle $f : \theta \mapsto 2\theta$ sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ce que l'on pourra utiliser sans démonstration).

Pour la partition en arcs $P := \{[0, 1/2[, [1/2, 1[\}$ et le doublement de l'angle f sur le cercle, le diamètre de P^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En raisonnant comme dans la question précédente il en est de même de $Q = \pi'^{-1}P$ pour le système (Y, α). En particulier on a pour tout $\mu \in \mathcal{M}(Y, \alpha)$

$$h(\mu) = h(\mu, Q) = h(\pi'^*\mu, P) = h(\pi'^*\mu).$$

Autrement dit π'^* préserve l'entropie des mesures. Il suit du principe variationel que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, f)$ et (Y, α) ont même entropie topologique. Or l'entropie topologique est invariant par conjugaison, d'où $h_{top}(F) = \log 2$.

3 Dynamiques substitutives

Soit A un ensemble fini. On considère une substitution sur A, i.e. une application $\xi : A \to \bigcup_{k>0} A^k$. Si $a = a_1...a_k \in A^k$ et $b = b_1...b_l \in A^l$ on note $a \cdot b$ la concaténation des mots a et b donnée par

$$a \cdot b = a_1...a_k b_1...b_l.$$

La substitution ξ induit une application, encore notée ξ, sur $A^{\mathbb{N}}$ et sur $\bigcup_{k>0} A^k$ de la façon suivante :

$$\xi(a_0 a_1 \dots a_n \dots) := \xi(a_0) \cdot \xi(a_1) \cdot \dots \xi(a_n) \cdot \dots$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note ξ^n la substitution définie par récurence pour tout $a \in A$ par $\xi^n(a) = \xi(\xi^{n-1}(a))$. Dans ce problème on considérera toujours une substitution ξ satisfaisant $|\xi^n(a)| \xrightarrow{n} +\infty$ pour tout $a \in A$, où $|\xi^n(a)|$ désigne la longueur du mot $\xi^n(a)$.

3.1 Points périodiques de la substitution $\xi : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$.

(1) Vérifier que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ et tout mot c

$$\xi^{n+m}(c) = \xi^n(\xi^m(c)).$$

On raisonne par récurrence sur n. Par définition l'identité est vraie pour $n = 1$. Puis on a $\xi^{n+m}(c) = \xi(\xi^{n+m-1}(c)) = \xi(\xi^{n-1}(\xi^m(c))) = \xi^n(\xi^{m-1}(c))$.

(2) Montrer qu'il existe $a \in A$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que le mot $\xi^p(a)$ commence par la lettre a. Pour $b \in A$ fixé on pourra considérer la collection de mots $\{\xi^k(b),\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

L'ensemble des lettres étant fini, on peut trouver deux mots $\xi^l(b)$ et $\xi^{l+p}(b)$ dans la collection infinie $\{\xi^k(b),\ k \in \mathbb{N}^*\}$ (pour un certain $b \in A$) qui commence par la même lettre a. Or le mot $\xi^{l+p}(b) = \xi^p(\xi^l(b))$ commence avec le sous-mot $\xi^p(a)$.

(3) On munit $A^{\mathbb{N}}$ de la métrique

$$d\left((y_n)_n, (z_n)_n\right) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\delta_{y_n, z_n}}{2^n}$$

avec $\delta_{u,v} = 0$ si $u = v$ et 1 sinon. Soit $x = (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ avec $x_0 = a$. Montrer que la suite $\left(\xi^{pn}(x)\right)_n$ est de Cauchy.

Le mot $\xi^{pn}(x)$ commence avec le sous-mot $\xi^{pn}(a)$. Puis le fait que $\xi^p(a)$ (et donc $\xi^{pr}(a)$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$) commence par la lettre a entraine que $\xi^{pm}(a)$ est un préfixe du mot $\xi^{pn}(a) = \xi^{pm}(\xi^{p(n-m)}(a))$ pour $n > m$. Ceci conclut la question car on a par hypothèse $|\xi^n(a)| \xrightarrow{n} +\infty$.

(4) Conclure qu'il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ satisfaisant $\xi^p(u) = u$.

Soit u une limite de la suite de Cauchy $(\xi^{pn}(x))_n$ (l'espace métrique $A^{\mathbb{N}}$ est compact donc complet). L'application $\xi^p : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ étant continue on a

$$\begin{aligned} \xi^p(u) &= \lim_n \xi^p(\xi^{pn}(x)), \\ &= \lim_n \xi^{p(n+1)}(x) = u. \end{aligned}$$

3.2 Minimalité de $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$. On suppose dorénavant qu'il existe $u \in A^{\mathbb{N}}$ avec $\xi(u) = u$. Quitte à restreindre l'alphabet A on peut supposer que toutes les lettres de l'alphabet apparaissent dans u. On munit $A^{\mathbb{N}}$ du décalage σ et on considère le sous-décalage unilatère $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ avec $\mathcal{O}(u) = \{\sigma^k(u),\ k \in \mathbb{N}\}$. On étudie dans cette partie la minialité de ce système. On admettra que le critère de minimalité vu en classe pour les sous-décalages bilatères est encore valide pour les décalages unilatères (Proposition 7.1 du polycopié). On note $M(\xi) = (m_{ij})_{1 \le i,j \le d}$ la matrice carré d'ordre $d = \sharp A$, où m_{ij} est le nombre de lettres j apparaissant dans le mot $\xi(i)$.

(1) Vérifier que $M(\xi^n) = M(\xi)^n$ pour tout entier $n > 0$.

Cela vient de

$$\sharp\{j \text{ dans } \xi^n(i) = \xi(\xi^{n-1}(i))\} = \sum_{k \in A} \sharp\{j \text{ dans } \xi(k)\} \times \sharp\{k \text{ dans } \xi^{n-1}(i)\}.$$

(2) Dans cette question on suppose $M(\xi)$ primitive.

(a) Montrer que la première lettre u_0 de $u = (u_n)_n$ apparait dans u avec des sauts bornés, i.e. il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ avec } |m - n| < M \text{ et } u_m = u_0.$$

Par définition il existe $P > 0$ tel que $M(\xi)^P = M(\xi^P) > 0$. En particulier u_0 apparait dans $\xi^P(a)$ pour tout $a \in A$. Or $u = \xi^P(u) = \xi^P(u_0) \cdot \xi^P(u_1) \cdot \ldots$. On peut donc prendre $M = \max_{a \in A} |\xi^P(a)|$.

(b) Soit $w \in \mathcal{L}(u)$ un sous-mot de u. Montrer qu'il existe un entier $k > 0$ tel que w soit un sous-mot de $\xi^k(u_0)$.

En effet $u = \xi^k(u)$ a $\xi^k(u_0)$ comme préfixe et $|\xi^k(u_0)| \xrightarrow{k} +\infty$.

(c) Conclure que $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ est minimal.

Puisque u_0 apparait avec des sauts bornés, il en est de même de $\xi^k(u_0)$. On conclut à la minimalité de $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ à l'aide du critère vu en cours.

(3) Réciproquement montrer que $M(\xi)$ est primitive lorsque $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ est minimal.

Toutes les lettres de A apparaissent dans u dont l'orbite est dense. Donc il existe $w \in \mathcal{L}(u)$ tel que toutes les lettres de A apparaissent dans w. Par minimalité le mot w apparait à des saut bornés et est donc contenu dans tous les $\xi^P(a)$ avec $a \in A$ pour un P assez grand.

3.3 Entropie nulle. Toujours sous les hypothèses de la seconde partie, on assume de plus que $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ est minimal.

(1) Pour tout $a \in A$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\xi^p(a)$ en fonction de $M(\xi)$. Déduire alors du théorème de Perron-Froebenius l'existence de $\lambda > 1$ tel que

$$\forall a \in A \ \exists c_a > 0 \ |\xi^p(a)| \sim^p c_a \lambda^p.$$

Soit P tel que $M(\xi)^P > 0$. Notons $M(\xi^n) = (m_{ij}^n)_{i,j}$. Pour $p > P$ on a $|\xi^p(a)| = \sum_{b \in A} m_{ab}^p = \sum_{b,c \in A} m_{ac}^P m_{c,b}^{p-P} \geq C\|M(\xi)^{p-P}\| \geq C'\lambda^p$ avec $\lambda = \rho(M(\xi))$ et $\|(m_{ij})_{i,j}\| = \sum_{i,j} |m_{ij}|$. Or $\sum_{b \in A} m_{ab}^p$ est aussi la a^{eme} coordonnée du vecteur $M(\xi)^p u$ avec $u = (1, ..., 1)$. L'espace propre associé à λ est de dimension 1 engendré par un vecteur propre strictement positif. Le vecteur u a une composante non-nulle dans cet espace propre, sinon $\|M(\xi)^p u\|$ croitrait moins vite d'après le Théorème de Perron-Froebenius dans le cas primitif.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier $p_n > 0$ tel que[1]

$$\inf_{a \in A} |\xi^{p_n - 1}(a)| \leq n \leq \inf_{a \in A} |\xi^{p_n}(a)|.$$

Cela suit de l'hypothèse sur la longueur des $\xi^n(a)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) Soit $w \in \mathcal{L}_n(u)$ un sous-mot de u de longueur n. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}_2(u)$ tel que w est un sous-mot de $\xi^{p_n}(v)$.

Cela vient de la définition de p_n et de $u = \xi^{p_n}(u) = \xi^{p_n}(u_0) \cdot \xi^{p_n}(u_1) \cdot ....$

(4) En déduire que

$$\sharp \mathcal{L}_n \left(\overline{\mathcal{O}(u)}\right) \leq \sharp A^2 \times \sup_{a \in A} |\xi^{p_n}(a)|.$$

D'après la question précédente, on doit compter le nombre de sous-mots de longueur n apparaissant dans les mots de la forme $\xi^{p_n}(ab)$ avec $a, b \in A$ et qui commence dans $\xi^{p_n}(a)$. Une fois choisis a et b (au plus $\sharp A^2$ possibilités) il suffit de considérer le point de départ du mot dans $\xi^{p_n}(a)$ (au plus $\sup_{a \in A} |\xi^{p_n}(a)|$ possibilités).

(5) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n > 0$

$$\sharp \mathcal{L}_n \left(\overline{\mathcal{O}(u)}\right) \leq Cn.$$

Conclure que $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ est d'entropie topologique nulle.

$$\begin{aligned}
\sharp \mathcal{L}_n \left(\overline{\mathcal{O}(u)}\right) &= \sharp A^2 \times \sup_{a \in A} |\xi^{p_n}(a)|, \\
&\leq C' \lambda^{p_n}, \\
&\leq C \inf_{a \in A} |\xi^{p_n - 1}(a)| \leq Cn.
\end{aligned}$$

et donc

$$h_{top}(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma) = \limsup_n \frac{1}{n} \log \sharp \mathcal{L}_n \left(\overline{\mathcal{O}(u)}\right) = 0.$$