CONTRÔLE MAT551 - 2018 - DURÉE 3H

Notation : Pour une partition Q d'un ensemble X, on note $Q(x)$ l'élément de Q contenant $x \in X$.

1 Exemples

1) Donner sans aucune justification un exemple de système dynamique

- probabiliste ergodique mais pas mélangeant,
  La mesure de Lebesgue pour une rotation irrationnelle du cercle.
- topologique transitif mais pas minimal.
  Le décalage sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

2 Odomètre

Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que p_k divise p_{k+1} pour tout k. On munit le produit $\prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ de la topologie produit (chaque facteur $\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ étant muni de la topologie discrète). On considère le sous-ensemble fermé X du compact métrisable $\prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ donné par les suites $(a_k)_k$ satisfaisant $a_k = a_{k+1} \pmod{p_k}$ pour tout k et l'application continue $f : X \to X$ qui à $(a_k)_k \in X$ associe $(a_k+1)_k$.

2) Montrer que pour tout $x \in X$ et pour tout $(a_0, \cdots, a_l) \in \prod_{0\leqslant k\leqslant l} \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ avec $a_k = a_{k+1} \pmod{p_k}$ pour $0 \leqslant k < l$, il existe un entier $n > 0$ tel que les $(l+1)$-premières coordonnées de $f^n(x)$ soient données par $(a_0, \cdots, a_l)$. En déduire que (X, f) est minimal.
Il suffit de prendre $n = a_l - x_l \pmod{p_l}$. Il s'en suit que l'orbite de tout $x = (x_k)_k$ est dense dans X.

3) Montrer que la probabilité uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'unique probabilité borélienne invariante pour le système topologique donné par la translation $x \mapsto x+1$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (toujours muni de la topologie discrète).
Pour une telle mesure on a $\mu(\{i\}) = \mu(t^{-1}\{i\}) = \mu(\{i-1\})$ et donc $\mu(\{i\}) = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4) Pour tout $l \in \mathbb{N}$ on note $\pi_l : X \to \mathbb{Z}/p_l\mathbb{Z}$, l'application $(a_k)_k \mapsto a_l$. Identifier pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$ la mesure $\pi_l^*\mu$. En déduire que (X, f) est uniquement ergodique.
La mesure $\pi_l^*\mu$ est invariante pour la translation par 1 sur $\mathbb{Z}/p_l\mathbb{Z}$. D'après la question précédente, c'est nécessairement la probabilité uniforme. En particulier si μ, ν sont deux mesures invariantes de (X, f) elles coïncident sur le π-système générateur constitué des ensembles de la forme $A \times \in \prod_{l<k} \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ avec $A \subset \prod_{0\leqslant k\leqslant l} \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$. Donc elles sont égales.

5) Montrer que l'unique probabilité borélienne f-invariante ν n'est pas mélangeante.
On a vu en TD que l'extension d'un système non mélangeant est non mélangeant. Or la mesure uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas mélangeante pour la translation.

6) Montrer que l'entropie de ν est nulle. En déduire l'entropie topologique de (X, f).
Si P_l est la partition en points de $\mathbb{Z}/p_l\mathbb{Z}$, alors la suite $(\pi_l^{-1}P_l)_l$ est une suite génératrice de partitions de (X, ν). D'après le théorème des générateurs de Sinaï, on a $h(\nu) = \lim_l h(\nu, \pi_l^{-1}P_l) = \lim_l h(\pi_l^*\nu) = 0$, car l'entropie d'une mesure périodique est nulle. Le principe variationnel donne $h_{top}(f) = h(\nu) = 0$.

7) On considère les odomètres (X_2, f_2) et (X_3, f_3) associés aux suites respectives $(2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(3^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer que la fonction continue $\psi : X_2 \to \{-1, 1\}$, définie par $\psi((a_k)_k) = (-1)^{a_1}$, satisfait $\psi \circ f_2 = -\psi$. Vérifiez aussi que pour toute fonction continue $\phi : X_3 \to \mathbb{R}$ la suite $(\phi \circ (f_3)^{3^n})_n$ converge simplement -*pointwisely*- vers ϕ. Les systèmes (X_2, f_2) et (X_3, f_3) sont-ils topologiquement conjugués ?
On a $\psi \circ f_2((a_k)_k) = (-1)^{a_1+1} = -\psi((a_k)_k)$ pour tout $(a_k)_k \in X_2$. Puis $(f_3)^{3^n}$ coïncide avec l'identité de X_3 sur les n-premières coordonnées, donc $\phi \circ (f_3)^{3^n}$ converge simplement vers ϕ quand n tends vers l'infini. Si $\pi : (X_3, f_3) \to (X_2, f_2)$ était une conjugaison topologique, alors pour $\phi = \psi \circ \pi$ on aurait $\phi \xleftarrow{n} \phi \circ (f_3)^{3^n} = (\psi \circ \pi) \circ (f_3)^{3^n} = \psi \circ (f_2)^{3^n} \circ \pi = (-1)^{3^n} \psi \circ \pi = -\phi.$, mais $\phi \neq 0$...

3 Théorème de Loch

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $D^n(x)$ (resp. $P^n(x)$) l'ensemble des réels de $[0,1]$ dont le développement décimal, i.e. en base 10, (resp. le développement en fraction continue) coïncide avec celui de x jusqu'à l'ordre n. On note $m(x,n)$ le plus grand entier M avec $D^n(x) \subset P^M(x)$. Autrement dit tout nombre ayant le même développement décimal que x jusqu'à l'ordre n a le même développement en fraction continue que x jusqu'à l'ordre $m(x,n)$.

Théorème 3.1 (Loch 1964)**.** *Pour Lebesgue presque tout point $x \in [0,1]$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m(x,n)}{n} = \frac{6\log 2 \log 10}{\pi^2}.$$

Nous avons étudié à plusieurs reprises le système de Gauss $([0,1], G)$ défini par $G(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ pour $x \in]0,1]$ et $G(0) = 0$. On note $P = \{]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}],\ p \in \mathbb{N}^*\}$ la partition en branches monotones de G sur $]0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $P^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} G^{-k}P$. On choisit par convention $P^0 = \{[0,1]\}$. On admettra les résultats suivants :

— la mesure de Gauss $\mu_G = \frac{dx}{(1+x)\log 2}$ est une mesure de probabilité G-invariante ergodique sur $[0,1]$ d'entropie

$$h(\mu_G) = \frac{\pi^2}{6\log 2},$$

— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in P^n$, la restriction de G^n à A est un difféomorphisme sur $G^n(A) \supset]0,1[$ et

$$\forall x, y \in A, \qquad \frac{|(G^n)'(x)|}{|(G^n)'(y)|} \leqslant 100.$$

8) Vérifier que pour $A \in P^n$, la partition induite par P^{n+1} sur l'intervalle A est donnée par une infinité d'intervalles disjoints s'accumulant sur l'extrémité droite ou gauche de A suivant la parité de n.
La restriction de G^n à tout $A \in P^n$ est un difféomorphisme croissant (resp. décroissant) sur $G^n(A) \supset]0,1[$ lorsque n est paire (resp. impaire). Donc la partition induite par P^{n+1} sur A est donnée par une collection d'intervalles disjoints s'accumulant sur l'extrémité gauche (resp. droite) de l'intervalle A.

9) Soit $I \subset [0,1]$ un intervalle ouvert. On note m_I le plus grand entier M tel qu'il existe $A \in P^M$ avec $I \subset A$. Deux intervalles disjoints sont dits adjacents lorsque leur union est aussi un intervalle. Montrer à l'aide de la question précédente, que pour tout $x \in I \backslash \mathbb{Q}$ il existe $B \in P^{m_I+r}$ adjacent à $P^{m_I+r}(x)$ avec $B \subset I$ et $0 < r \leqslant 3$. *Indications :* Remarquer qu'une des extrémités de $P^{m_I+1}(x)$ appartient à I.
Par définition de m_I, une des extrémités y de $P^{m_I+1}(x)$ appartient à I. Supposons qu'il s'agisse de l'extrémité gauche, l'autre cas se traitant de façon similaire. On a $y \neq x$ car sinon $G^{m_I+1}(x) = 0$ et $x \in \mathbb{Q}$. Si $m_I + 1$ est paire (resp. impaire) alors d'après la question précédente l'élément de P^{m_I+2} (resp. P^{m_I+3}) adjacent à gauche de $P^{m_I+2}(x)$ (resp. $P^{m_I+3}(x)$) est inclus dans $[y, x] \subset I$.

10) Montrer que si deux éléments A et B de P^{n+1} sont adjacents, alors il existe $C \in P^n$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $|p-q| = 1$ tels que $A = C \cap G^{-n}\left(\left]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right]\right)$ et $B = C \cap G^{-n}\left(\left]\frac{1}{q+1}, \frac{1}{q}\right]\right)$.
Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n+1$ notons A^k et B^k les éléments de P^k contenant A et B respectivement. Soit m le plus grand entier inférieur ou égal à n tel que $A^m = B^m$. Alors $G^m(A^{m+1})$ et $G^m(B^{m+1})$ sont deux éléments adjacents de P. Si $m < n$ alors $G^m(A^{m+2})$ et $G^m(B^{m+2})$ ne sont pas adjacents et il en est donc de même des sous-ensembles A^{m+2} et B^{m+2} de $A^m = B^m$, et donc de A et B.

11) En déduire que $\frac{Leb(A)}{Leb(B)} \leqslant 300$ pour deux éléments adjacents A et B de P^{n+1}, où Leb désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.
Puisque G^n réalise un difféomorphisme de A et B sur $(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p})$ et $(\frac{1}{q+1}, \frac{1}{q})$ respectivement,

on a

$$\begin{aligned}\frac{Leb(A)}{Leb(B)} &\leqslant \frac{q(q+1)}{p(p+1)}\frac{\sup_{x\in C}|(G^n)'(x)|}{\inf_{x\in C}|(G^n)'(x)|},\\ &\leqslant 100\frac{p+2}{p}\leqslant 300.\end{aligned}$$

12) Montrer que pour tout $x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{Leb(P^{m(x,n)+3}(x))}{300} \leqslant Leb(D^n(x)) \leqslant Leb(P^{m(x,n)}(x)).$$

Le point x étant irrationnel, il appartient à l'intérieur $\overset{\circ}{\overbrace{D^n(x)}}$ de $D^n(x)$. D'après la question 11 appliqué à l'intervalle $I = \overset{\circ}{\overbrace{D^n(x)}}$ (on a alors $m_I = m(x,n)$ et donc $\overset{\circ}{\overbrace{D^n(x)}} \subset P^{m(x,n)}(x)$), il existe $0 < r \leqslant 3$ tel que $A \subset D^n(x)$ pour A un élément de $P^{m(x,n)+r}$ adjacent à $P^{m(x,n)+r}(x)$. D'après la question précédente, on a

$$Leb(A) \geqslant \frac{Leb\left(P^{m(x,n)+r}(x)\right)}{300}\ \left(\geqslant \frac{Leb\left(P^{m(x,n)+3}(x)\right)}{300}.\right)$$

13) En déduire le Théorème de Loch à l'aide de la formule de Shanon-McMilman-Breiman.
D'après cette formule appliquée à μ_G ergodique (en TD on a vu que cette formule était valide pour la partition dénombrable P car l'entropie statique $H_{\mu_G}(P)$ est finie) et l'équivalence de μ_G et Leb, on a pour μ_G et donc Lebesgue presque tout $x \in [0,1]$

$$\lim_n -\frac{1}{n}\log Leb\left(P^n(x)\right) \quad = \quad h(\mu_G).$$

Puis d'après la question précédente, on a pour Lebesgue presque tout $x \in [0,1]$ (vu que $Leb(\mathbb{Q}) = 0$)

$$\begin{aligned}\liminf_n -\frac{1}{n}\log Leb\left(P^{m(x,n)+3}(x)\right) \geqslant \quad & \lim_n -\tfrac{1}{n}\log Leb\left(D^n(x)\right) & \geqslant \limsup_n -\frac{1}{n}\log\mu\left(P^{m(x,n)}(x)\right),\\ \liminf_n \frac{m(x,n)}{n}h(\mu_G) \geqslant \quad & \log 10 & \geqslant \limsup_n \frac{m(x,n)}{n}h(\mu_G).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_n \frac{m(x,n)}{n} = \frac{\log 10}{h(\mu_G)} = \frac{6\log 2\log 10}{\pi^2}.$$

4 Automates cellulaires linéaires

Soit $p > 1$ un nombre premier. On considère le produit $X = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ (muni de la topologie produit des topologies discrètes). Soit $(c_i)_{i\in I} \in ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*)^I$ avec I un ensemble fini de $\mathbb{Z}$. A tout $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ on associe la suite $f(a)$ définie par $f(a)_n = \sum_{i\in I} c_i a_{n+i}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on notera

$$n\cdot I := \underbrace{I+\cdots+I}_{n \text{ fois}} = \{i_1+\cdots i_n,\ (i_1,\cdots,i_n)\in I^n\} \text{ avec } 0\cdot I = \varnothing \text{ par convention.}$$

Pour tout $J \subset \mathbb{Z}$ on définit la partition en ouvert-fermés $P_J := \left\{[b],\ b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^J\right\}$, où $[b]$ désigne le cylindre $[b] := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X,\ a_m = b_m \text{ pour } m \in J\}$ pour $b = (b_j)_{j\in J}$. On définit la longueur $|J|$ d'un sous-ensemble fini J de $\mathbb{Z}$ comme $|J| = \max J - \min J$. Enfin on appelle segment d'entiers tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ donné par une suite finie d'entiers consécutifs.

14) Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in X$, montrer que $(f^n(a))_q$ ne dépend que de a_k pour $k \in q + n\cdot I$.
On raisonne par récurrence sur n. On a $(f^{n+1}(a))_q = \sum_{i\in I} c_i(f^n(a))_{q+i}$ pour tout q. Par récurrence $(f^n(a))_{q+i}$ ne dépend que de a_k pour $k \in q+i+n\cdot I \subset q+(n+1)\cdot I$.

15) En déduire que pour tout $J \subset \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ la partition P_{J^n} est plus fine que $\bigvee_{m=0}^n f^{-m} P_J$ avec $J^n := \bigcup_{m=0}^n (J + m \cdot I)$.
D'après la question précédente $P_{J+m\cdot I}$ est plus fine que $f^{-m}P_J$ pour tout m. Par conséquent $\bigvee_{m=0}^n P_{J+m\cdot I} = P_{J^n}$ est plus fine que $\bigvee_{m=0}^n f^{-m}P_J$.

16) On suppose dans la suite du problème que J est un segment d'entiers de longueur $|J| > \max(-\min I, \max I, |I|)$. Montrer que $J + n \cdot I$ puis J^n est un segment d'entiers pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Indications :* Montrer tout d'abord que $J + I$ est un segment d'entiers et que $J \cap (J + I) \neq \varnothing$.
Clairement il suffit de montrer que

— $J \cap (J+I) \neq \varnothing$, ceci entrainant $(J + n \cdot I) \cap (J + (n+1) \cdot I)) \neq \varnothing$ pour tout entier $n > 0$,

— $J + I$ est un segment d'entiers, il en est alors de même de $J + n \cdot I$ pour tout entier $n > 0$ par récurrence sur n (en effet $|J + n \cdot I| \geqslant J$ et $J + (n+1) \cdot I = (J + n \cdot I) + I$).

Pour le premier point on a en fait $J \cap (J + i) \neq \varnothing$ pour tout $i \in I$. En effet sinon on aurait $i \notin J - J$ et donc $|J| < |i| \leqslant \max(-\min I, \max I)$. Enfin $J + I = \bigcup_{i \in I}(J + i)$. Pour tout $i \in I$ l'ensemble $J + i$ est un segment et $(J + i) \cap (J + i') \neq \varnothing$ pour $i, i' \in I$ car sinon on aurait $i - i' \notin J - J$ et donc $|J| < |i - i'| \leqslant |I|$.

17) Soit $a \in X$ avec $a_j = (f(a))_j = 0$ pour tout $j \in J$. Montrer que $a_m = 0$ pour tout $m \in J + I$. *Indications :* On pourra considérer le plus grand intervalle K contenant J avec $a_k = 0$ pour $k \in K$ et montrer que $I + J \subset K$.
Soit K le plus grand segment d'entiers contenant J tel que $a_k = 0$ pour $k \in K$. Montrons que $K \supset J + I$. Supposons par l'absurde $\max K < \max I + \max J$ (on raisonne de même avec le minimum). Remarquez que $k = \max K + 1 - \max I$ vérifie $k \leqslant \max J$ et $k \geqslant \max J + 1 - \max I > \max J + 1 - |J|$. En particulier $k \in J$ et donc $(f(a))_k = 0$. De plus pour $i \in I \backslash \{\max I\}$ on a $\max K \geqslant k + i \geqslant \max K + 1 - |I| \geqslant \max K - |J| \geqslant \max K - |K| = \min K$ et donc $k + i \in K$ et $a_{k+i} = 0$. Mais alors $(f(a))_k = \sum_{i \in I} c_i a_{k+i} = c_{\max I} a_{\max K + 1} \neq 0$, contradiction.

18) On note 0 la suite nulle de X. Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P_{J^n}(0) = \left(\bigvee_{m=0}^n f^{-m} P_J \right)(0).$$

Indications : Raisonner par récurrence en appliquant la question précédente à J^n au lieu de J. A la question précédente on a montré le résultat pour $n = 1$. On raisonne par récurrence. Supposons le résultat vrai pour n et montrons le pour $n + 1$. Soit $a \in \left(\bigvee_{m=0}^{n+1} f^{-m}P_J\right)(0)$. Alors $a, f(a) \in (\bigvee_{m=0}^n f^{-m}P_J)(0)$ ce qui d'après l'hypothèse de récurrence se réécrit $a, f(a) \in P_{J^n}(0)$. Or J^n vérifie les mêmes hypothèses que J et donc en appliquant la question précédentes à J^n on obtient $a_k = 0$ pour $k \in J^n \cup (J^n + I) = J^{n+1}$.

19) En utilisant la linéarité de f montrer que $P_{J^n} = \bigvee_{m=0}^n f^{-m} P_J$.
Il suffit de remarquer que pour tout $a \in X$,

— $a + P_{J^n}(0) = P_{J^n}(a)$ (c'est trivial),

— $a + \bigvee_{m=0}^n f^{-m}P_J(0) = \bigvee_{m=0}^n f^{-m}P_J(a)$, qui suit des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in a + \bigvee_{m=0}^n f^{-m}P_J(0) &\Leftrightarrow x - a \in \bigvee_{m=0}^n f^{-m}P_J(0), \\ &\Leftrightarrow \forall m = 0, \cdots, n,\ f^m(x-a) = f^m(x) - f^m(a) \in P_J(0), \\ &\Leftrightarrow \forall m = 0, \cdots, n,\ f^m(x) \in P_J(f^m(a)), \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\bigvee_{m=0}^n f^{-m}P_J \right)(a). \end{aligned}$$

20) Exprimer $h_{top}(f, P_J)$, puis $h_{top}(f)$ en fonction de I et p.
On a $h_{top}(f) = \lim_N h_{top}(f, P_{[-N,N]})$. De plus pour tout N on a $h_{top}(f, P_{[-N,N]}) = \lim_n \frac{1}{n} \log \sharp \left(\bigvee_{m=0}^n f^{-m}P_{[-N,N]}\right)$, puisque $P_{[-N,N]}$ est une partition en ouvert-fermés. Or

pour N assez grand on peut appliquer la question précédente à $J = [-N, N]$ de sorte que

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{1}{n} \log \sharp \bigvee_{m=0}^{n} f^{-m} P_{[-N,N]} &= \lim_n \frac{1}{n} \log \sharp P_{J^n}, \\ &= (\log p) \times \lim_n \frac{|J^n|}{n}.\end{aligned}$$

On distingue alors les cas suivants :

— $I \subset \mathbb{N}$ (resp. $-\mathbb{N}$) alors $h_{top}(f) = (\max I) \times \log p$ (resp. $h_{top}(f) = (-\min I) \times \log p$),

— $\min I < 0 < \max I$, alors $h_{top}(f) = |I| \times \log p$.