CONTROLE MAT551 - 2019 - DURÉE 3H

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.
La qualité de la rédaction sera un facteur important de l'appréciation des copies.

1 Une dynamique produit

On considère l'homéomorphisme f du tore $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{T}^3,\ \ f(x,y,z) = \left(x+\sqrt{2}, 2y+z, y+z\right)$$

1) Est-ce que $(\mathbb{T}^3, f)$ est uniquement ergodique ? minimal ?

L'homéomorphisme f est le produit de la rotation d'angle α sur le cercle avec l'automorphisme linéaire hyperbolique du tore $\mathbb{T}^2$ donné par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ce dernier étant ni uniquement ergodique ni minimal, il en est de même du produit.

2) Montrer que la mesure de Lebesgue de $\mathbb{T}^3$, notée Leb, est f-invariante ergodique. *<u>Indications :</u>* Pour $\phi \in L^2(Leb)$ on écrira les coefficients de Fourier de $\phi \circ f$ en fonction de ceux de ϕ.

On calcule les coefficients de Fourier de $\phi \circ f$ pour $\phi \in L^2(Leb)$:

$$a_{k,l,m}(\phi \circ f) = e^{2i\pi k\sqrt{2}} a_{k,(A^{-1})^*(l,m)}(\phi)$$

En raisonnant comme pour le cas des automorphismes linéaires hyperboliques du tore $\mathbb{T}^2$ on voit que si $\phi \circ f = \phi$ alors $(|a_{k,l,m}(\phi)|)_{l,m}$ pour k fixé est de carré sommable ssi $l = 0$. Puis pour $(l,m) = 0$ on a $a_{k,0,0}(\phi) = e^{2i\pi k\sqrt{2}} a_{k,0,0}(\phi)$. Ainsi on a $a_{k,0,0}(\phi) = 0$ pour $k \neq 0$ et donc ϕ est constante.

3) En déduire que f est topologiquement transitif.

La mesure de Lebesgue étant ergodique on a pour Lebesgue presque tout $X \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ et tout ouvert U :

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sharp\{0 \leq k < n,\ \ f^k X \in U\} \geq Leb(U) > 0.$$

En choisissant une base dénombrable d'ouverts $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ on en déduit que l'orbite $\{f^n X,\ n \in \mathbb{N}\}$ de Lebesgue presque tout point X est dense.

4) Déterminer l'entropie topologique de f et montrer que $h(Leb) = h_{top}(f)$.

L'entropie topologique ou mesurée d'un produit est la somme des entropies. Puisque la rotation est d'entropie nulle et l'automorphisme lineaire hyperbolique de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est d'entropie $\log \lambda_u = \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ avec $Leb_{\mathbb{T}^2}$ pour mesure d'entropie maximale, f est aussi d'entropie $\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $Leb_{\mathbb{T}^3} = Leb_{\mathbb{T}^1} \times Leb_{\mathbb{T}^2}$ est d'entropie maximale.

2 Théorème de Livsic pour les sous-décalages

Pour un système topologique donné par une application continue $T : X \to X$ sur un espace métrique compact (X,d), une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ est un cobord s'il existe une fonction $\psi : X \to \mathbb{R}$ continue satisfaisant $\phi = \psi \circ T - \psi$. La fonction ψ est appelée la fonction de transfert associée à ϕ. Une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ est dite Hölder d'exposant $\alpha \in]0,1]$, lorsqu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x,y \in X,\ \ |\phi(x) - \phi(y)| \leq C d(x,y)^\alpha.$$

Enfin pour $n \in \mathbb{N}$ on notera d_n la distance n-dynamique et $S_n\phi$ la n^{eme} somme de Birkhof de ϕ :

$$\forall x,y \in X,\ \ d_n(x,y) = \max\{d(f^k x, f^k y),\ \ k = 0, \cdots, n-1\}$$

$$\forall x \in X,\ \ S_n\phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x).$$

2.1 Cas des sous-décalages de type fini. On considère dans cette première partie le sous-décalage de type fini (Y_A, σ) associé à une matrice d'adjacence irréductible $A \in M_K(\{0,1\})$. L'ensemble $Y_A \subset \{1, \cdots, K\}^{\mathbb{Z}}$ est muni de la distance

$$\forall u, v \in Y_A,\ d(u,v) = 2^{-\min\{|k|,\ u_k \neq v_k\}}.$$

Nous proposons de montrer le théorème de Livsic dans ce cadre :

Théorème (Livsic)**.** *Soit $\phi : Y_A \to \mathbb{R}$ une fonction Hölder. Alors ϕ est un cobord si et seulement si $\sum_{x\in\mathcal{O}} \phi(x) = 0$ pour tout orbite périodique $\mathcal{O}$ de (Y_A, σ). Dans ce cas la fonction de transfert ψ associée à ϕ est unique à constante près et ψ est Hölder de même exposant que ϕ.*

5) Montrer que si ϕ est un cobord et $\mathcal{O}$ une orbite périodique alors $\sum_{x\in\mathcal{O}} \phi(x) = 0$.

Soit $\mu_{\mathcal{O}}$ la meure périodique associée à $\mathcal{O}$. Alors par invariance de la mesure $\mu_{\mathcal{O}}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sharp\mathcal{O}} \sum_{x\in\mathcal{O}} \phi(x) &= \int \phi\, d\mu_{\mathcal{O}},\\ &= \int (\psi\circ\sigma - \psi)\, d\mu_{\mathcal{O}},\\ &= 0.\end{aligned}$$

6) Soit $\phi : Y_A \to \mathbb{R}$ une fonction Hölder d'exposant $\alpha \in]0,1]$. Montrer qu'il existe $D > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in Y_A$

$$|S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| \leq D\, (d_n(x,y))^{\alpha}.$$

Si $d_n(x,y) < 1/2^N$ alors les suites x et y ont les mêmes coordonnées sur $[-N, n+N-1]$. En particulier pour $0 \leq k < n$ on a

$$d(\sigma^k x, \sigma^k y) < \frac{1}{2^{N+\min(k,n-k-1)}}$$

et donc

$$\begin{aligned}|S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k y)|,\\ &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} d(\sigma^k x, \sigma^k y)^{\alpha},\\ &\leq \frac{C}{2^{N\alpha}} 2 \sum_{k\in\mathbb{N}} 1/2^{k\alpha} = \frac{D}{2^{N\alpha}}.\end{aligned}$$

7) Montrer que pour tout $(y,n) \in Y_A \times \mathbb{N}^*$ avec $d(y, \sigma^n y) < 1/2$ il existe $x \in Y_A$ avec $\sigma^n x = x$ et $d_n(x,y) \leq 2d(\sigma^n y, y)$.

La suite périodique $x = y(n)^{\mathbb{Z}}$ obtenue en répétant le mot fini $y(n) = y_0 \cdots y_{n-1}$ convient.

8) Montrer que si ϕ est un cobord avec ψ pour fonction de transfert, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n\phi = \psi\circ\sigma^n - \psi.$$

Immédiat.

9) Soit $\phi : Y_A \to \mathbb{R}$ une fonction Hölder avec $\sum_{x\in\mathcal{O}} \phi(x) = 0$ pour tout orbite périodique $\mathcal{O}$ de (Y_A, σ). On fixe $y \in Y_A$. Montrer que la fonction ψ définie sur $\mathcal{O}_y := \{\sigma^n y,\ n \in \mathbb{N}\}$ par $\psi(y) = 0$ et $\psi\circ\sigma^n(y) = S_n\phi(y)$ pour $n > 0$, se prolonge en une application Hölder de même exposant que ϕ sur la fermeture $\overline{\mathcal{O}_y}$ de $\mathcal{O}_y$. *Indications :* Pour $\sigma^p y, \sigma^q y \in \mathcal{O}_y$ avec $n = q - p > 0$ on pourra appliquer la question 7) à $(\sigma^p y, n) \in Y_A \times \mathbb{N}^*$.

Il s'agit de vérifier que ψ est Hölder de même exposant que ϕ sur $\mathcal{O}_y$, car on peut alors prolonger ψ sur la fermeture de $\mathcal{O}_y$. Soient $\sigma^p(y), \sigma^q(y)$ deux points de $\mathcal{O}_y$. On peut supposer $n = q - p > 0$. D'après la question 7) il existe x avec $\sigma^n(x) = x$ et $d_n(x, \sigma^p y) \leq 2d(\sigma^p(y), \sigma^q(y))$. Puis d'après 6) on a

$$\begin{aligned}|S_n\phi(x) - S_n\phi(\sigma^p y)| &\leq D\, (d_n(x, \sigma^p y))^{\alpha},\\ &\leq D' d(\sigma^p(y), \sigma^q(y))^{\alpha}.\end{aligned}$$

Or $S_n\phi(x) = 0$ par hypothèse et la question précédente donne alors

$$|\psi(\sigma^q y) - \psi(\sigma^p y)| = |S_n\phi(\sigma^p y)| \leq D' d(\sigma^p(y), \sigma^q(y))^{\alpha}.$$

10) En déduire que ϕ est un cobord.

Le système (Y_A, σ) est transitif car A est supposé irréductible. Il suffit alors de prendre y d'orbite $\mathcal{O}_y$ dense dans la question précédente.

11) Montrer que si ψ et ψ' sont deux fonctions de transfert associées à ϕ alors $\psi - \psi'$ est constante.

La fonction $\psi - \psi'$ est une fonction continue σ-invariante. Le système étant transitif cette fonction est constante.

2.2 Contre-exemple sofique. On considère l'ensemble $Y = Y(K)$ avec $K > 4$ des suites $w = (w_n)_n \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que

$$\forall m < n \in \mathbb{Z}, \quad \left| \sum_{m \leq k \leq n} w_k \right| < K.$$

On munit Y du décalage $\sigma((w_n)_n) = (w_{n+1})_n$. Soit $A \in M_K(\{0,1\})$ la matrice d'adjacence définie par $A_{i,j} = |i - j|$ si $|i - j| = 1$ et $A_{i,j} = 0$ sinon. On note (Y_A, σ_A) le sous-décalage de type fini associé.

12) Montrer que l'application $\pi : (Y_A, \sigma_A) \to (Y, \sigma)$ définie par $\pi((u_n)_n) = (u_{n+1} - u_n)_n$ est une extension topologique.

L'application π est clairement continue et vérifie $\pi \circ \sigma_A = \sigma \circ \pi$. Montrons que π est surjective. Si $w = (w_n)_n \in Y$ la suite $u = (u_n)_n$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$ pour $n \geq 0$ et $u_n = w_0 - \sum_{k=n}^{-1} w_k$ pour $n < 0$ vérifie $\pi(u) = w$.

13) On note ϕ la fonction de Y dans $\mathbb{R}$ qui à une suite $(w_n)_n$ de Y associe son premier terme w_0. Montrer que $\sum_{x \in \mathcal{O}} \phi(x) = 0$ pour tout orbite périodique $\mathcal{O}$ de (Y, σ).

Si w est n-périodique alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $|\sum_{k=0}^{np-1} w_k| = p \cdot |\sum_{k=0}^{n-1} w_k| < K$. Donc $\sum_{x \in \mathcal{O}_w} \phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$.

14) On suppose que ϕ est un cobord de fonction de transfert continue ψ.

i) Montrer qu'il existe une constante $E \in \mathbb{R}$ telle que $\forall (u_n)_n \in Y_A,\ \psi \circ \pi((u_n)_n) = u_0 + E$.
<u>*Indications :*</u> Considérer le cobord $\phi \circ \pi$ de (Y_A, σ_A).

L'application $\phi \circ \pi$ satisfait les hypothèses du Théorème de Livsic pour le sous-décalage de type fini transitif (Y_A, σ_A). De plus, on a $\phi \circ \pi = (\psi \circ \sigma) \circ \pi - \psi \circ \pi = (\psi \circ \pi) \circ \sigma_A - \psi \circ \pi$ et pour tout $u \in Y_A$ on a $\phi \circ \pi(u) = u_1 - u_0 = \Phi \circ \sigma_A - \Phi$ avec $\Phi : Y_A \to \mathbb{R},\ u \mapsto u_0$. Par unicité de la fonction de transfert à constante près, il existe E tel que $\psi \circ \pi = \Phi + E$.

ii) En déduire que pour tout $w \in Y$ il existe $\alpha_0 \in \{1, \cdots, K\}$ tel que $u_0 = \alpha_0$ pour tout $(u_n)_n \in \pi^{-1}(w)$.

D'après la question précédente on a pour un tel u :

$$\psi(w) = \psi \circ \pi(u) = \Phi(u) + E = u_0 + E.$$

iii) Soit $w \in Y(K-1) \subset Y(K)$. Montrer qu'il existe $(u_n)_n, (v_n)_n \in \pi^{-1}(w)$ avec $u_0 \neq v_0$.

Pour $w \in Y(K-1)$ tout $u \in Y_A$ avec $\pi(u) = w$ prend au plus $K-1$ valeurs consécutives. Donc il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ avec $u + \epsilon = (u_n + \epsilon)_n \in Y_A$. De plus $\pi(u + \epsilon) = \pi(u) = w$ et $u_0 + \epsilon \neq u_0$.

15) Conclure que le théorème de Livsic ne s'applique pas à (Y, σ).

L'application ϕ vérifie les hypotheses du théorème de Livsic pour (Y, σ) mais n'est pas un cobord avec une fonction de transfert continue.

3 Fer à cheval sur l'intervalle

3.1 Entropie d'un fer à cheval. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. On suppose que pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$, l'application f^m admet une famille $\mathcal{I} = \{I_1, \cdots, I_p\}$ de sous-intervalles fermés de $[0,1]$ deux à deux disjoints satisfaisant $I_l \subset f^m(I_k)$ pour tout l, k. Une telle famille est appelée un p-fer-à-cheval de f^m. On note $I := \bigcup_k I_k$ et $C_{\mathcal{I}} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-nm} I$. Soit $\pi : C_{\mathcal{I}} \to \{1, \cdots, p\}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in C_{\mathcal{I}}\, \forall n \in \mathbb{N},\ [(\pi(x))_n = k] \Leftrightarrow [f^{nm}(x) \in I_k].$$

16) Montrer que $\pi : (C_{\mathcal{I}}, f^m) \to (\{1, \cdots, p\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ définit une extension topologique.

Par définition de π, on a clairement $\pi \circ f^m = \sigma \circ \pi$. Par récurrence sur k on a $\bigcap_{l=0}^{k-1} f^{-lm} I_{i_l} \neq \emptyset$ pour toute suite finie $i_0 \cdots i_{k-1} \in \{1, \cdots, p\}^k$. L'image de π est donc dense dans $\{1, \cdots, p\}^{\mathbb{N}}$ mais elle est aussi compact par continuité de π...

17) En déduire que $h_{top}(f) \geq \frac{\log p}{m}$.

L'entropie de l'extension étant au moins celle du facteur, on a $h_{top}(C_{\mathcal{I}}, f^m) \geq h_{top}(\{1, \cdots, p\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. Or $h_{top}(\{1, \cdots, p\}^{\mathbb{Z}}, \sigma) = \log p$ et $h_{top}(C_{\mathcal{I}}, f^m) \leq h_{top}([0,1], f^m) = m h_{top}([0,1], f)$.

3.2 Caractérisation de l'entropie.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue avec $h_{top}(f) > \lambda > \log 3$.

18) Montrer qu'il existe une partition finie P de $[0,1]$ en intervalles telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp P^n > \lambda \text{ avec } P^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} P \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Il existe un recouvrement d'ouverts $\mathcal{U}$ de $[0,1]$ en intervalles tel que $h_{top}(f, \mathcal{U}) > \lambda$. Il s'en suit que si P désigne la partition induite par $\mathcal{U}$ alors tout élément de P est inclus dans un élément de $\mathcal{U}$. Donc $H(\mathcal{U}^n) \leq \log \sharp P^n$ puis $h(P) \geq h_{top}(\mathcal{U}) > \lambda$.

19) Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites d'entiers naturels non nuls. Montrer que

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \max \left(\limsup_n \frac{1}{n} \log (a_n), \limsup_n \frac{1}{n} \log(b_n) \right).$$

Quitte à prendre $a_n' = \min(a_n, p^n)$ et $b_n' = \min(b_n, p^n)$ pour p arbitrairement grand on peut supposer que ces lim sup sont finies. On conclut en remarquant que le rayon de CV de la série entière produit $(\sum_n a_n x^n)(\sum_n b_n x^n)$ est le min des rayons de CV des séries entières associées à $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

20) Pour tout $A \in P$ et $n \in \mathbb{N}$ on note P_A^n la partition de A induite par P^n, i.e. formée des éléments $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i \neq \emptyset$ avec $A_0 = A$ et $A_i \in P$ pour $i = 0, \cdots, n-1$. On considère le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de P constitué des $A \in P$ satisfaisant $\limsup_n \frac{1}{n} \log \sharp P_A^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp P^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{F}$ on note $\mathcal{F}_A^n$ le sous-ensemble de P_A^n formé des éléments $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i \neq \emptyset$ avec $A_0 = A$ et $A_i \in \mathcal{F}$ pour $i = 0, \cdots, n-1$. Montrer à l'aide de la question précédente que

$$\forall A \in \mathcal{F}, \ \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp P_A^n = \limsup_n \frac{1}{n} \log \sharp \mathcal{F}_A^n.$$

Pour un élément $C = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i \in P_A^n$ on note k_C le plus petit entier k tel que $A_k \notin \mathcal{F}$. On a alors en découpant l'intervalle d'entiers $[0, n]$ suivant k_C,

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \sharp P_A^n = \limsup_n \frac{1}{n} \log \sum_k \sharp \mathcal{F}_A^k \cdot \left(\sum_{B \notin \mathcal{F}} \sharp P_B^{n-k} \right).$$

On conclut en appliquant la question pécédente avec $a_k = \sharp \mathcal{F}_A^k$ et $b_k = \sum_{B \notin \mathcal{F}} \sharp P_B^k$.

21) Pour tout $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i \in P^n$ montrer qu'il existe un sous-intervalle $J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}$ de A_0 tel que $f^{n-1}\left(J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}\right) = f^{n-1}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i\right)$. *Indications :* Commencer par $n = 2$ ...

Pour $n = 1$ on note $[a_1, b_1] = f\left(A_0 \cap f^{-1}(A_1)\right) = f(A_0) \cap A_1$. Soit a_0 et b_0 dans A_0 tels que $f(a_0) = a_1$ et $f(b_0) = b_1$ et $f(x) \neq a_1, b_1$ pour tout $x \in [a_0, b_0]$ alors on vérifie facilement avec le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a_0, b_0]) = f(A_0) \cap A_1$. Pour n quelconque, on prend $f^{n-1}\left(J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}\right)$ et A_n à la place de A_0 et A_1. On obtient un intervalle $J' \subset f^{n-1}\left(J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}\right)$ avec $f(J') = f^n\left(\bigcap_{i=0}^{n} f^{-i} A_i\right)$. Puis on prend $J_{A_0, \cdots, A_n}$ un sous-intervalle de $J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}$ avec $f^{n-1} J_{A_0, \cdots, A_n} = J'$.

22) Pour tout $A, B \in \mathcal{F}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c(A, B, n) = \sharp \left\{ \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i \in \mathcal{F}_A^n, \ B \subset f^n \left(J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}\right) \right\}$. Montrer que $\sum_{B \in \mathcal{F}} c(A, B, n) \geq \sharp \mathcal{F}_A^{n+1} - 2 \sharp \mathcal{F}_A^n$.

Pour $A^n \in P^n$ il y a au plus deux éléments B de P qui ne sont pas inclus dans l'intervalle $f^n\left(J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}\right)$. On en déduit l'inégalité voulue.

23) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$ il existe une infinité d'entiers n avec $\sharp \mathcal{F}_A^n \geq 3 \sharp \mathcal{F}_A^{n-1}$ et $\frac{\log \sharp \mathcal{F}_A^n}{n} > \lambda$. En déduire qu'il existe $\phi(A) \in \mathcal{F}$ tel que $\limsup_n \frac{1}{n} \log c(A, \phi(A), n) > \lambda$.

Soit I l'ensemble infini défini par $I := \{n, \ \frac{\log \sharp \mathcal{F}_A^n}{n} > \lambda\}$ et soit $J := \{n, \ \sharp \mathcal{F}_A^n \geq 3 \sharp \mathcal{F}_A^{n-1}\}$. Supposons $I \cap J$ fini. Alors pour $n \in I$ assez grand on a $n \notin J$ et donc $n - 1 \in I$. Par conséquent tout n assez grand appartient à $I \cap (\mathbb{N} \setminus J)$, mais ceci entraine $\limsup_n \frac{\log \sharp \mathcal{F}_A^n}{n} \leq \log 3 < \lambda$. On conclut en prenant dans la question précédente une sous suite dans $I \cap J$.

24) En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $c(A, A, n) > 2\lambda^n$. *Indications :* On pourra vérifier que $c(A, C, n+m) \geq c(A, B, n) \times c(B, C, m)$ pour $A, B, C \in \mathcal{F}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ a un point périodique A. Notons k sa période. L'indication donne alors $\limsup_n \frac{1}{n} \log c(A, A, n) \geq \min_{l=0,\cdots,k-1} \limsup_n \frac{1}{n} \log c(\phi^l(A), \phi^{l+1}(A), n) > \lambda$.

25) Conclure que f^n admet un p-fer à cheval avec $\frac{\log p}{n} > \lambda$.

On prend A et n comme dans la question précédente. Alors l'ensemble des intervalles $J_{A_0 \cdots A_{n-1}} \subset A$ associés aux éléments de P_A^n avec $A \subset f^n J_{A_0 \cdots A_{n-1}}$ est de cardinal $> 2\lambda^n$. Quitte à en prendre seulement un sur deux, on peut supposer que leurs fermetures sont deux à deux disjointes. On obtient ainsi un p-fer à cheval de f^n avec $p > \lambda^n$.