CONTROLE MAT551 - 2020 - DURÉE 3H

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

1 Etats d'équilibre à température 0

Soit (X, T) un système topologique et $\phi : X \to \mathbb{R}$ une observable continue. Un état d'équilibre de ϕ est une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ satisfaisant

$$h(\mu) + \int \phi \, d\mu = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(X,T)} \left(h(\nu) + \int \phi \, d\nu \right).$$

(1) Montrer que si (X, T) est un sous-décalage, alors il existe un état d'équilibre de ϕ.

La fonction $\mu \mapsto \int \phi \, d\mu$ est continue et le sous-décalage étant un système expansif, la fonction entropie est semi-continue supérieurement. La somme des ces fonctions est donc semi-continue supérieurement et atteint donc son maximum.

On suppose dans la suite que (X, T) est un sous-décalage de type fini (Σ_A, σ) associé à une matrice d'adjacence irréductible $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_d(\{0, 1\})$ et qu'il existe $\Phi : \{1, \cdots, d\}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) = \Phi(x_0, x_1)$ pour tout $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_A$.

On note P la partition[1] en coordonnée 0 et pour $B^n = \bigcap_{k=0}^{n-1} \sigma^{-k}[i_k] \in P^n$ avec $(i_k)_{k=0,\cdots,n-1} \in \{1, \cdots, d\}^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\phi(B^n) = \sum_{k=0}^{n-2} \Phi(i_k, i_{k+1})$.

Dans les deux questions suivantes on fixe une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)$.

(2) Montrer que $\sum_{B^n \in P^n} \mu(B^n)\phi(B^n) = (n-1) \int \phi \, d\mu$.

Pour tout $x \in B^n$, on a $\sum_{k=0}^{n-2} \phi(\sigma^k x) = \phi(B^n)$ et donc en intégrant par rapport à μ qui est σ-invariante :

$$\begin{aligned} \sum_{B^n \in P^n} \mu(B^n)\phi(B^n) &= \int \sum_{k=0}^{n-2} \phi(\sigma^k x) \, d\mu(x), \\ &= (n-1) \int \phi \, d\mu. \end{aligned}$$

(3) En utilisant la concavité de $x \mapsto -x \log x$, montrer que $H_\mu(P^n) + (n-1) \int \phi d\mu \le \log \left(\sum_{B^n \in P^n} e^{\phi(B^n)} \right)$.

1. Pour rappel P est la partition en cylindres $[i] := \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_A, \ x_0 = i\}$ pour $i \in \{1, \cdots, d\}$.

Avec $\psi(x) = -x\log x$, $\alpha_i = \frac{e^{\phi(B^n)}}{\sum_{B^n\in P^n} e^{\phi(B^n)}}$ et $y_i = \mu(B^n)e^{-\phi(B^n)}$ on a $\sum_i \alpha_i = 1$ et $\sum_i \alpha_i y_i = \frac{1}{\sum_{B^n\in P^n} e^{\phi(B^n)}}$. Puis on obtient en utilisant la concavité de ψ :

$$\begin{aligned}
H_\mu(P^n) + (n-1)\int \phi d\mu &= \sum_{B^n\in P^n} \mu(B^n)\left(-\log\mu(B^n) + \phi(B^n)\right),\\
&= \sum_{B^n\in P^n} -\mu(B^n)\log\left(\mu(B^n)e^{-\phi(B^n)}\right),\\
&= \left(\sum_{B^n\in P^n} e^{\phi(B^n)}\right)\sum_{B^n\in P^n} -\frac{e^{\phi(B^n)}}{\sum_{B^n\in P^n} e^{\phi(B^n)}} e^{-\phi(B^n)}\mu(B^n)\log\left(e^{-\phi(B^n)}\mu(B^n)\right),\\
&= \left(\sum_{B^n\in P^n} e^{\phi(B^n)}\right)\sum_i \alpha_i\psi(y_i),\\
&\leq \left(\sum_{B^n\in P^n} e^{\phi(B^n)}\right)\psi\left(\sum_i \alpha_i y_i\right),\\
&\leq \log\left(\sum_{B^n\in P^n} e^{\phi(B^n)}\right).
\end{aligned}$$

On pose $A_\phi = (e^{\Phi(i,j)}a_{i,j})_{i,j}$ et on note $\rho(A_\phi)$ le rayon spectral de A_ϕ.

(4) Montrer que $\limsup_n \frac{1}{n}\log\left(\sum_{B\in P^n} e^{\phi(B^n)}\right) \leq \log\rho(A_\phi)$.

Pour tout $n \geq 2$, on a $\sum_{B\in P^n} e^{\phi(B^n)} = \|A_\phi^{n-1}\|$ avec $\|\cdot\|$ la norme matricielle donnée par $\|B\| = \sum_{i,j}|b_{i,j}|$. On conclut à l'aide de la formule du rayon spectral.

(5) En déduire que $\max_{\mu\in\mathcal{M}(\Sigma_A,\sigma)}\left(h(\mu) + \int\phi\, d\mu\right) \leq \log\rho(A_\phi)$.

Il suffit d'appliquer (3) et (4) en utilisant $h(\mu) = \lim_n \frac{H_\mu(P^n)}{n}$.

On considère u et v des vecteurs propres positifs à gauche et à droite de A_ϕ associés à la valeur propre $\rho(A_\phi)$ satisfaisant $\sum_i u_i v_i = 1$. On note π le vecteur ligne de probabilité $\pi = (u_i v_i)_i$ et Q la matrice carrée d'ordre d donnée par $Q = \left(\frac{e^{\Phi_{i,j}}a_{i,j}v_j}{\rho(A_\phi)v_i}\right)_{i,j}$.

(6) Vérifier que Q est une matrice stochastique et que π est Q-stationnaire.
Pour tout i on a $\sum_j e^{\phi_{i,j}}a_{i,j}v_j = (A_\phi v)_i = \rho(A_\phi)v_i$. Puis

$$\begin{aligned}
(\pi Q)_j &= \sum_i u_i v_i \frac{e^{\phi_{i,j}}a_{i,j}v_j}{\rho(A_\phi)v_i},\\
&= \frac{v_j}{\rho(A_\phi)}\sum_i u_i e^{\phi_{i,j}}a_{i,j},\\
&= v_j u_j = \pi_j.
\end{aligned}$$

(7) Montrer que μ_ϕ, la mesure de Markov associée à π et Q, est un état d'équilibre de ϕ.

En utilisant la formule du cours pour une matrice markovienne, et en reprenant le calcul de l'entropie pour la mesure de Parry on obtient,

$$\begin{aligned} h(\mu_\phi) &= -\sum_{i,j} \pi_i p_{i,j} \log p_{i,j}, \\ &= -\sum_{i,j} u_i v_i \frac{a_{ij} e^{\Phi(i,j)} v_j}{\lambda v_i} \log \left(\frac{a_{ij} e^{\Phi(i,j)} v_j}{\lambda v_i} \right), \\ &= -\sum_{i,j} u_i \frac{a_{ij} e^{\Phi(i,j)} v_j}{\lambda} \log(a_{ij} e^{\Phi(i,j)}) + u_i \frac{a_{ij} e^{\Phi(i,j)} v_j}{\lambda} \log \left(\frac{v_j}{\lambda v_i} \right). \end{aligned}$$

La seconde double somme donnée par le terme de droite se calcule comme l'entropie de la mesure de Parry dans le cours et est égale à $\log \rho(A_\phi)$, tandis que la première double somme est égale à $-\sum_{i,j} u_i \frac{a_{ij} e^{\Phi(i,j)} v_j}{\lambda} \Phi(i,j) = -\int \phi \, d\mu_\phi$. On en conclut que $h(\mu_\phi) + \int \phi \, d\mu_\phi = \log \rho(A_\phi)$.

Soit $\alpha(\phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)} \int \phi \, d\mu$. On note $\mu_x = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta_{\sigma^k x}$ la mesure périodique associée à un point périodique x de période M de (Σ_A, σ).

Un point périodique y de (Σ_A, σ) est dit **premier** lorsqu'il s'écrit comme la concaténation inifinie w^∞ d'un mot $w = w_1 \cdots w_N$ avec $w_p \neq w_q$ for $p \neq q \in [\![1, N]\!]$ (en particulier y est de période $N \leq d$).

(8) Montrer que pour tout point périodique x de (Σ_A, σ) de période M, il existe des points périodiques premiers $y^1, \cdots, y^K$ de période respective $N_1, \cdots, N_K$ avec $\sum_{l=1}^K N_l = M$ tels que $M \int \phi \, d\mu_x = \sum_{l=1}^K N_l \int \phi \, d\mu_{y^l}$ et $\{x_i x_{i+1} \; : \; i \in [\![1, M]\!]\} = \{y_i^l y_{i+1}^l \; : \; i \in [\![1, N_l]\!], \, l = 1, \cdots, K\}$. Indications : On pourra raisonner par récurrence sur M.

Soit x_i, $i = 1, \cdots, M$ sont distincts 2 à 2 et alors x est premier, ou bien il existe $1 \leq i < j \leq M$ avec $x_i = x_j$ avec $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}$ deux à deux distincts de sorte que $z = w^\infty$ avec $w = x_i \cdots x_{j-1}$ définit un point périodique premier. Notons alors y le point périodique associé à v^∞ avec $v = x_1 \cdots x_{i-1} x_i x_{j+1} \cdots x_M$. On a $M \int \phi \, d\mu_x = (j-i) \int \phi \, d\mu_z + (M-j+i) \int \phi \, d\mu_y$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à y. .

(9) En déduire que $\alpha(\phi) = \sup\{\int \phi \, d\mu_y, \; y \text{ périodique premier de } (\Sigma_A, \sigma)\}$.

Les mesures périodiques étant denses dans $\mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)$, on a $\alpha(\phi) = \sup\{\int \phi \, d\mu_x, \; x \text{ périodique}\}$. Or d'après la question précédente on a pour tout x périodique, $\int \phi \, d\mu_x = \sum_{l=1}^K \frac{N_l}{M} \int \phi \, d\mu_{y^l} \leq \sup\{\int \phi \, d\mu_y, \; y \text{ périodique premier}\}$.

On note $\Sigma_{\tilde{A}} \subset \Sigma_A$ le sous-décalage de type fini donné par la matrice d'adjacence $\tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j})_{i,j}$ définie $\tilde{a}_{i,j} = 1$ ssi il existe $i, j \in \{i, \cdots, d\}$ et $x = (x_n)_n$ un point périodique premier de (Σ_A, σ) avec $x_0 = i$ et $x_1 = j$ et $\int \phi \, d\mu_x = \alpha(\phi)$.

(10) Soit $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A)$ ergodique. On suppose qu'il existe i, j satisfaisant $\tilde{a}_{i,j} = 0$ et $\mu([i, j]) > 0$ (avec $[ij] = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_A, \; x_0 = i \text{ et } x_1 = j\}$. Montrer que $\int \phi \, d\mu < \alpha(\phi)$. Indications : On pourra considérer un point générique pour μ et utiliser la question 8.

Soit x un point générique pour μ. On considère deux occurences consécutives du 2-mot ij, par exemple $x_k = i, x_{k+1} = j, \cdots, x_l = i, x_{l+1} = j$. Le point périodique y_k associé à $x_k \cdots x_{l-1}$ de période $l - k$ vérifie d'après la question 8 : $(k - l)(-\int \phi \, d\mu_{y_k} + \alpha(\phi)) > c$ avec $c = \inf\{\alpha(\phi) - \int \phi \, d\mu_y\}$, l'infimum portant sur les y périodiques premier avec $\alpha(\phi) - \int \phi \, d\mu_y > 0$. En effet il y a un point périodique premier z dans la décomposition de y_k donné par la question 8 qui contient " l'arrête " ij et puisque $\tilde{a}_{i,j} = 0$ on a donc $\int \phi \, d\mu_z < \alpha(\phi)$. On en déduit à l'aide du théorème ergodique en notant $(k_p)_p$

les retours susccessifs dans $[ij]$:

$$
\begin{aligned}
\alpha(\phi) - \int \phi d\mu &= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \left(-\phi \circ \sigma^j(x) + \alpha(\phi)\right), \\
&\geq \limsup_P \frac{1}{k_P} \sum_{p \leq P} (k_{p+1} - k_p)(-\int \phi \, d\mu_{y_{k_p}} + \alpha(\phi)), \\
&\geq \limsup_P \frac{Pc}{k_P}, \\
&\geq c\mu([ij]).
\end{aligned}
$$

(11) En déduire que $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)$

$$
\left[\int \phi \, d\mu = \alpha(\phi)\right] \Rightarrow \left[\mu(\Sigma_{\tilde{A}}) = 1\right].
$$

Toute composante ergodique ν de μ vérifie $\int \phi \, d\mu = \alpha(\phi)$ et donc $\nu(\Sigma_{\tilde{A}}) = 1$ d'après la question précédente. Par conséquent $\mu(\Sigma_{\tilde{A}}) = 1$.

(12) Soit x un point périodique de $(\Sigma_{\tilde{A}}, \sigma)$ de période M. Soit $y^1, \cdots y^M$ des points périodiques premiers de période respective $N_1, \cdots, N_M$ tels que $y_0^l y_1^l = x_l x_{l+1}$ et $\int \phi \, d\mu_{y^l} = \alpha(\phi)$ pour $l = 1, \cdots, M$. On note $Y^1, \cdots, Y^M$ les chemins fermés correspondant à $y^1, \cdots, y^M$ dans le graphe $\mathcal{G}_A$. En considérant le chemin fermé obtenu en recollant pour $l = 1, \cdots, M$ les arrêtes de Y_l excepté $\{y_0^l y_1^l\}$, montrez que $\int \phi \, d\mu_x = \alpha(\phi)$.

Soient Z ce chemin, z le point périodique associé et $N = \sum_l (N_l - 1) = \sum_l N_l - M$ sa période. On a

$$
\begin{aligned}
N \int \phi \, d\mu_z + M \int \phi \, d\mu_x &= \sum_l N_l \int \phi \, d\mu_{y^l}, \\
&= (N + M)\alpha(\phi).
\end{aligned}
$$

Ceci entraine que $\int \phi \, d\mu_z = \int \phi \, d\mu_x = \alpha(\phi)$.

(13) En déduire que $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)$

$$
\left[\int \phi \, d\mu = \alpha(\phi)\right] \Leftarrow \left[\mu(\Sigma_{\tilde{A}}) = 1\right].
$$

Les mesures périodiques étant denses dans $\mathcal{M}(\Sigma_{\tilde{A}}, \sigma)$, cela suit directement de la question précédente.

(14) Montrer que tout point d'accumulation de $(\mu_{\beta\phi})_{\beta \in \mathbb{R}^+}$ quand β tends vers $+\infty$ est une mesure supportée par $\Sigma_{\tilde{A}}$. Vérifier ensuite qu'une telle mesure est d'entropie maximale pour $(\Sigma_{\tilde{A}}, \sigma)$.

Montrons tout d'abord que tout point d'accumulation est supporté par $\Sigma_{\tilde{A}}$. Sinon on a pour un $\epsilon > 0$ et β arbitrairement grand, $\int \phi \, d\mu_\beta < \alpha(\phi) - \epsilon$ et donc pour toute mesure invariante μ on a $h(\mu) + \beta \int \phi \, d\mu \leq h(\mu_\beta) + \beta(\alpha(\phi) - \epsilon)$. En particulier $\beta\alpha(\phi) \leq h_{top}(\sigma) + \beta(\alpha(\phi) - \epsilon)$ pour β arbitrairement grand, ce qui est impossible. Puis si ν est une mesure invariante avec $\alpha(\phi) = \int \phi \, d\nu$, l'inégalité $h(\nu) + \beta \int \phi \, d\nu \leq h(\mu_\beta) + \beta \int \phi \, d\mu_\beta \leq h(\mu_\beta) + \beta\alpha(\phi)$ entraine $h(\nu) \leq h(\mu_\beta)$ puis par semi-continuité supérieure de l'entropie $h(\nu) \leq h(\xi)$ pour tout point d'accumulation ξ de $(\mu_{\beta\phi})_{\beta \in \mathbb{R}^+}$.

(15) On considère le décalage complet sur $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$ et l'application Φ définie par $\Phi_{1,1} = \Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} = -1$ et $\Phi_{i,j} = -2$ pour les autres paires (i, j). Montrer que $\mu_{\beta\phi}$ converge quand β tends vers $+\infty$ et déterminer sa limite.

On a clairement $\alpha(\phi) = -2$ puis $\Sigma_{\tilde{A}}$ est le sous-décalage de type fini donné par le graphe dont les arrêtes sont $1 \to 1$, $1 \to 2$ et $2 \to 1$. Ce sous-décalage est transitif et admet donc une unique mesure d'entropie maximale, qui est alors la limite des μ_β.

2 β-DÉCALAGE

Pour un réel $x > 0$, on note $[x] = \sup\{k \in \mathbb{N},\ k < x\}$ et $[0] = 0$. On considère l'application discontinue de l'intervalle $[0,1]$ définie par $T_\beta(x) = \beta x - [\beta x]$ pour $\beta > 1$. Pour tout $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$ on pose $a_k(x) = [\beta T_\beta^k(x)]$ avec pour convention T_β^0 l'identité sur $[0,1]$.

(16) Vérifiez que $x = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_{k-1}(x)\beta^{-k}$ pour tout $x \in [0,1]$.

On vérifie par récurrence sur N que $x - \sum_{k=1}^N a_{k-1}(x)\beta^{-k} = \beta^{-N}T_\beta^N(x)$. C'est vrai pour $N = 0$. Puis

$$\begin{aligned} x - \sum_{k=1}^{N+1} a_{k-1}(x)\beta^{-k} &= \beta^{-N}T_\beta^N(x) - \beta^{N+1}a_N(x), \\ &= \beta^{-(N+1)}\left(\beta T_\beta^N(x) - [\beta T_\beta^N(x)]\right), \\ &= \beta^{-(N+1)}T_\beta^{N+1}(x). \end{aligned}$$

On considère

$$X_\beta := \overline{\{(a_k(x))_{k\in\mathbb{N}},\ x \in [0,1]\}} \subset \{1, \cdots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}.$$

(17) Montrer que X_β définit un sous-décalage.

Cela suit de $\sigma(a_k(x))_k = (a_{k+1}(x))_k = (a_k(T_\beta(x))_k$.

Pour simplifier les notations, on écrit $(c_k)_k = (a_k(1))_k$. On note $\prec$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, i.e. $(b_k)_k \prec (d_k)_k$ lorsqu'il existe l tel que $b_k = d_k$ pour $0 \le k < l$ et $b_l < d_l$.

(18) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $(a_k(x))_k \preceq c_k$.

On suppose que $a_k(x) = c_k$ pour $k \le l$. Alors x et 1 sont dans la même branche affine de T_β^{l+1}, en particulier $T_\beta^{l+1}(x) \le T_\beta^{l+1}(1)$, puis $a_{l+1}(x) = [\beta T_\beta^{l+1}(x)] \le [\beta T_\beta^{l+1}(1)] = c_{l+1}$.

(19) Montrer que $X_\beta = \overline{\{(b_k)_k,\ \forall n \in \mathbb{N}\ (b_{k+n})_k \preceq (c_k)_k\}}$.

Soit $(b_k)_k$ avec $(b_{k+n})_k \preceq (c_k)_k$ pour tout n. Alors $x_n := \sum_{k\ge n} b_k\beta^{-k-1+n}$ appartient à $[0,1]$, car

$$\begin{aligned} \sum_{k\ge n} b_k\beta^{-k-1+n} &= \sum_{k'\in\mathbb{N}^*} b_{k'+n-1}\beta^{k'}, \\ &\le \sum_{k'\in\mathbb{N}^*} c_{k'-1}\beta^{k'} = 1. \end{aligned}$$

Si $x_n \neq 1$ pour tout n, on voit facilement par récurrence que $a_k(x_0) = b_k$ pour tout k. Sinon soit n le plus petit entier tel que $x_n = 1$. Alors $x_0 = \sum_{k<n} b_k\beta^{-k-1} + \beta^{-n}$, $a_{n-1}(x) = [b_{n-1} + 1] = b_{n-1}$ et $T_\beta^n(x_0) = 1$. Donc $a_{n+l}(x) = c_l = b_{n+l}$ pour tout $l \ge 0$.

On considère S l'ensemble des mots de la forme $c_0 \cdots c_{N-1}d_N$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $0 \le d_N < c_N$ (pour $N = 0$ ce sont juste les mots d_0 de longueur 1 donné par $0 \le d_0 < c_0$) et S^* l'ensemble des éléments de $\subset \{1, \cdots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}$ données par des concaténations inifinies de mots de S.

(20) Vérifiez que $\overline{S^*} = X_\beta$.

Clairement $X_\beta \subset \overline{S^*}$. Réciproquement tout élément $(b_k)_k = s_1 \cdot s_2 \cdots$ de S^* avec $s_1, s_2, \cdots \in S$ vérifie $(b_{k+n})_k \prec (c_k)_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $(b_k)_k \in X_\beta$ d'après la question précédente. En effet c'est immédiat pour $n = 0$, $n = |s_1|$,

$n = |s_1| + |s_2|, \cdots$. Il suffit de le vérifier pour $0 < n < |s_1| = N$. Mais dans ce cas la suite $(b_{k+n})_k$ commence par $c_n \cdots c_{N-1} b_N$ avec $d_N < c_N$ et donc $(b_{k+n})_k \prec (c_{k+n})_k$. Or d'après la question précédente on a $(c_{k+n})_k \preceq (c_k)_k$ car $(c_k)_k \in X_\beta$ et donc $(b_{k+n})_k \prec (c_k)_k$.

(21) Vérifiez que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a avec $\mathcal{L}_n(X_\beta)$ l'ensemble[2] des n-mots de X_β :

$$1 + \sum_{k=1}^{N} c_{k-1} \sharp \mathcal{L}_{N-k}(X_\beta) = \sharp \mathcal{L}_N(X_\beta)$$

D'après la question précédente tout N-mot de X_β est soit égale à $c_1 \cdots c_N$, soit s'écrit comme la concacaténation d'un mot de S de longueur k suivi d'un mot de X_β de longueur $N-k$ pour $k = 1, \cdots, N$. Or le cardinal des mots de S de longueur k est exactement c_{k-1}.

On pose f et g les séries entières données respectivement par $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_{n-1} x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sharp \mathcal{L}_n(X_\beta) x^n$.

(22) Montrer que les rayons de convergence de ces séries sont non nuls, puis qu' au voisinage de 0 on a $g(x)(1 - f(x)) = \frac{1}{1-x}$.

Puisque $c_n \leq [\beta]$ et $\sharp \mathcal{L}_n(X_\beta) \leq [\beta]^n$ on en déduit que les rayons de convergences de f et g sont respectivement plus grand que 1 et $\frac{1}{[\beta]}$. Puis pour $|x| < \frac{1}{[\beta]}$, on a par la formule du produit de Cauchy :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \sharp \mathcal{L}_n(X_\beta) x^n\right) \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_{n-1} x^n\right), \\ &= \sum_{N\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{k=1}^{N} c_{k-1} \sharp \mathcal{L}_{N-k}(X_\beta)\right) x^N, \\ &= \sum_{N\in\mathbb{N}^*} (\sharp \mathcal{L}_N(X_\beta) - 1) x^N, \\ &= g(x) - \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

(23) En déduire l'entropie topologique de (X_β, σ).

Par définition de $(c_n)_n$ on a $1 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_{n-1} \beta^{-n} = f(1)$ et $|f(x)| \leq f(|x|) < f(1) = 1$ pour $|x| < 1$. Donc d'après l'identité précédente g s'étend en une fonction méromorphe sur le disque unité avec pour pôle β^{-1} et holomorphe sur le disque centré en 0 de rayon β^{-1}. Il s'en suit que le rayon de convergence de f est égale à β^{-1} puis par la formule d'Hadamard :

$$h_{top}(X_\beta) = \limsup_n \frac{1}{n} \log \sharp \mathcal{L}_n(X_\beta) = \log \beta.$$

2. Par convention $\mathcal{L}_0(X_\beta)$ est formé du mot vide et est donc de cardinal 1.