CONTROLE MAT551 - 2021 - DURÉE 3H

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir une très bonne note...

1 Un calcul d'entropie

On note σ le décalage sur un ensemble de suites donné. On considère une mesure ergodique $\mu \in \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ et la mesure de Bernoulli $\nu = (1/2, 1/2)^{\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}(\{1,2\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ (qui correspond à un pile ou face équilibré sur $\{1,2\}$). Enfin on pose

$$\begin{aligned}\pi : &\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \times \{1,2\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}},\\ &((x_n)_n, (y_n)_n) \mapsto (x_n \times y_n)_n.\end{aligned}$$

(1) Rappeler rapidement pourquoi la mesure $\xi := \pi^*(\mu \times \nu)$ est invariante par le décalage sur $\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$.

Cela vient du fait que π est une semi-conjugaison.

On considère les partitions en coordonnée zéro P et Q respectives de $\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Aussi on note $\psi : \{0,1,2\} \to \{0,1\}$ l'application définie par $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = \psi(2) = 1$ et $\Psi : \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ l'application induite $\Psi((z_n)_n) = (\psi(z_n))_n$.

(2) Montrer que pour tout $z \in \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\xi(P^n(z)) = 2^{-\sharp\{0 \le k < n,\ \psi(z_k)=1\}} \mu(Q^n(\Psi(z))),$$

où $P^n(z)$ et $Q^n(\Psi(z))$ désigne les éléments des partitions itérées P^n et Q^n contenant z et $\Psi(z)$.

On a

$$\xi(P^n(z)) = (\mu \times \nu)(\pi^{-1} P^n(z))$$

Or $\pi^{-1}P^n(z) = \bigcup_{A^n} Q^n(z) \times A^n$ où la somme porte sur les cylindres $A^n = [a_0 \cdots a_{n-1}]$ de $\{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ tel que $a_i = z_i$ pour $z_i \neq 0$. Il y a $2^{n - \sharp\{0 \le k < n,\ \psi(z_k)=1\}}$ tels cylindres qui sont tous de ν-mesure $1/2^n$. On en déduit que $(\mu \times \nu)(\pi^{-1}P^n(z)) = 2^{-\sharp\{0 \le k < n,\ \psi(z_k)=1\}} \mu(Q^n(\Psi(z)))$.

(3) Vérifier que $\psi^*\xi = \mu$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H_\xi(P^n) = H_\mu(P^n) + \log 2 \int \sharp\{0 \le k < n,\ \sigma^k x \in [1]\}\, d\mu(x).$$

Remarquez que $\psi \circ \pi$ est la projection sur le premier facteur. On a pour tout borélien A,

$$\psi^*\xi(A) = \xi(\psi^{-1}A) = (\mu \times \nu)(\pi^{-1}\psi^{-1}A) = (\mu \times \nu)(A \times \{1,2\}^{\mathbb{Z}}) = \mu(A).$$

Puis on a pour tout n

$$\begin{aligned}H_\xi(P^n) &= \int -\log \xi(P^n(z))\, d\xi(z),\\ &= \int -\log \mu(Q^n(\Psi(z)))\, d\xi(z) + \log 2 \int \sharp\{0 \le k < n,\ \sigma^k \circ \Psi(z) \in [1]\}\, d\xi(z),\\ &= \int -\log \mu(Q^n(x))\, d\mu(x) + \log 2 \int \sharp\{0 \le k < n,\ \sigma^k x \in [1]\}\, d\mu(x),\\ &= H_\mu(Q^n) + \log 2 \int \sharp\{0 \le k < n,\ \sigma^k x \in [1]\}\, d\mu(x).\end{aligned}$$

(4) Conclure que $h(\xi) = h(\mu) + \mu([1]) \log 2$.

Il suffit de remarquer que les partitions P et Q sont génératrices et que par invariance de la mesure

$$\int \sharp\{0 \leq k < n,\ \sigma^k x \in [1]\}\, d\mu(x) = \int \sum_{0 \leq k < n} \chi_{[1]} \circ \sigma^k(x)\, d\mu(x) = n\mu([1]).$$

2 Homéomorphisme expansif en dimension 1

Un homéomorphisme $T : X \circlearrowleft$ d'un espace métrique compact est dit expansif s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$

$$[d(T^n x, T^n y) < \epsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow [x = y].$$

(5) Montrer que si T expansif alors T^k l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Par uniform continuité de T, il existe $\epsilon' \leq \epsilon$ tel que $[d(x, y) < \epsilon'] \Rightarrow [d(T^l x, T^l y) < \epsilon]$ pour tout $0 \leq l < |k|$. On en déduit facilement que T^k est expansif avec la constante ϵ'.

(6) Montrer que si (X, T) et (Y, S) sont deux systèmes topologiques conjuguées avec (X, T) expansif alors (Y, S) l'est aussi.

(7) Montrer que si U est un ensemble infini tel que $\mathrm{diam}(T^n U) \xrightarrow{|n| \to +\infty} 0$ alors (X, T) n'est pas expansif.

Par l'absurde, supposons que T soit expansif avec constante ϵ. Soit $N > 0$ tel que $\mathrm{diam}(T^n U) < \epsilon$ pour $|n| > N$. Par continuité tout sous ensemble V de U de diamètre assez petit vérifie $\mathrm{diam}(T^n V) < \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Clairement on peut choisir un tel sous ensemble infini. Cela contredit l'expansivité.

Soit f un homéomorphisme de l'intervalle $[0, 1]$.

(8) On suppose f croissant. Soient $a < b \in [0, 1]$ avec $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(y) \neq y$ pour tout $y \in]a, b[$. Montrer que tout intervalle $U = [c, d] \subset]a, b[$ vérifie l'hypothèse de la question précéndente.

Supposons par exemple que $f(y) > y$ sur $]a, b[$. Alors $f^n c (\leq f^n[cd])$ converge en croissant vers b quand n croit et $f^n d (\geq f^n[cd])$ converge en décroissant vers a quand n tends vers $-\infty$. On traite le cas $f(y) < y$ de façon similaire.

(9) En déduire que tout homéomorphisme de l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas expansif.

Quite à considérer f^2 on peut supposer f croissante. Cela suit alors des deux questions précedentes. On peut toujours supposer l'existence d'un tel U sinon f est l'identité qui n'est clairement pas expansif.

Soit f un homéomorphisme du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(10) Montrer que si f admet un point périodique, alors f n'est pas expansif.

Un homéo du cercle avec un point fixe est conjugué à une application de l'intervalle. Or s'il a un point périodique une de ses puissances admet un point fixe. On conclut avec (6) et (9).

(11) A l'aide du cours rappeler succintement pourquoi un homéomorphisme f du cercle apériodique préservant l'orientation qui ne possède pas d'ouvert U, tels que les ensembles $f^n U$, $n \in \mathbb{Z}$, soient deux à deux disjoints, est topologiquement conjugué à une rotation d'angle irrationel.

On a vu lors de la preuve du théorème de Denjoy qu'un tel homéo du cercle s'il n'était pas conjugué à une rotation admettait un tel ouvert.

(12) Conclure qu'un homéomorphisme du cercle n'est jamais expansif.

Si f n'admet pas de point périodique on peut se ramener au cas préservant l'orientation quite à considérer f^2. Puis on conclut avec (10), (11) et (7) en remarquant qu'une rotation n'est pas expansive.

3 Un théorème de Wiener-Witner

Soit $T : X \circlearrowleft$ un homéomorphisme d'un esapce métrique compact X et soit $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. On considère $f \in L^1(\mu)$. Soit $(\mathbb{T}, R_\theta)$ la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et soit $\nu_\theta \in \mathcal{M}(\mathbb{T}, R_\theta)$.

(13) Montrer à l'aide du théorème ergodique ponctuel que pour tout θ il existe un sous-ensemble borélien F_θ de $X \times \mathbb{T}$ avec $(\mu \times \nu_\theta)(F_\theta) = 1$, tel que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} e^{2i\pi(y+k\theta)} f(T^k x)\right)_n$ converge pour tout $(x,y) \in F_\theta$.

Il suffit d'appliquer le théorème ergodique ponctuel à $(X \times \mathbb{T}, T \times R_\theta, \mu \times \nu_\theta)$ et à l'observable $\phi : (x,y) \mapsto e^{2i\pi y} f(x)$.

(14) En déduire avec le théorème de Fubini, que pour tout θ il existe un sous-ensemble borélien E_θ de X avec $\mu(E_\theta) = 1$ tel que pour tout $x \in E_\theta$, la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} e^{2i\pi k\theta} f(T^k x)\right)_n$ converge.

Pour tout $y \in \mathbb{T}$ on pose $E_\theta^y = F_\theta \cap (X \times \{y\})$. D'après le théorème de Fubini, on a $(\mu \times \nu_\theta)(F_\theta) = \int \mu(E_\theta^y)\, d\nu_\theta(y) = 1$. Donc $\mu(E_\theta^y) = 1$ pour μ presque tout y. On pose alors $E_\theta = E_\theta^y$ pour un tel y.

(15) Rappeler sans démonstration la limite $\nu_{y,\theta}$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{T}, R_\theta)$ muni de la topologie faible-$*$ de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} \delta_{R_\theta^k y}\right)_n$ pour tout $y \in \mathbb{T}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Si θ est rationnel, $\nu_{y,\theta}$ est la mesure périodique en y. Sinon par unique ergodicité des rotations irrationnelles, $\nu_{y,\theta}$ est la mesure de Lebesgue.

*On suppose désormais μ **mélangeante**. On fixe θ et $\nu_\theta \in \mathcal{M}(\mathbb{T}, R_\theta)$. On considère une mesure $\lambda \in \mathcal{M}(X \times \mathbb{T}, T \times R_\theta)$ vérifiant $\pi_X^* \lambda = \mu$ et $\pi_{\mathbb{T}}^* \lambda = \nu_\theta$, où $\pi_X : X \times \mathbb{T} \to X$ et $\pi_{\mathbb{T}} : X \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ désignent respectivement les projections sur le premier et second facteur.*

On note p la projection orthogonale sur $L^2(\mu)$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\lambda)$, où l'on a identifié $L^2(\mu)$ au sous espace fermé de $L^2(\lambda)$:

$$L^2(\mu) := \{G \in L^2(\lambda),\ \exists g \in L^2(\mu)\ G(x,y) = g(x) \ \text{ pour } \lambda \text{ p.t. } (x,y)\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$\begin{aligned} e_n : & X \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \\ & (x,y) \mapsto e^{2i\pi n y}. \end{aligned}$$

(16) Montrer que $p(e_n)$ est un vecteur propre de l'opérateur de Koopman $U_T : L^2(\mu) \circlearrowleft$. En déduire que $p(e_n) = 0$ pour tout $n \neq 0$.

On pour tout $g \in L^2(\mu)$:

$$\begin{aligned} \int e_n \circ R_\theta \cdot g \, d\lambda &= e^{2i\pi n\theta} \int e_n \cdot g \, d\lambda, \\ &= e^{2i\pi n\theta} \int p(e_n) \cdot g \, d\mu, \\ \int e_n \circ R_\theta \cdot g \, d\lambda &= \int e_n \cdot g \circ T^{-1} \, d\mu, \\ &= \int p(e_n) \cdot g \circ T^{-1} \, d\mu, \\ &= \int p(e_n) \circ T \cdot g \, d\mu. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $g \in L^2(\mu)$ on conclut que $p(e_n) \circ T = e^{2i\pi n\theta} p(e_n)$. Mais μ étant mélangeante l'opérateur de Koopman associé n'a pas de vecteur propres autres que les constantes. En prenant $g = 1$, on obtient que cette constante est nulle : $p(e_n) = \int e_n \, d\lambda = \int e_n \, d\nu_\theta = 0$.

(17) Montrer que pour tout $(g,h) \in L^2(\mu) \times L^2(\nu_\theta)$ on a $\int g(x)h(y)\, d\lambda(x,y) = \int g\, d\mu \times \int h\, d\nu_\theta$. Conclure que $\lambda = \mu \times \nu_\theta$.

L'espace vectoriel engendré par les e_n, $n \neq 0$ étant dense dans $L^2_0(\nu_\theta) := \{h \in L^2(\nu_\theta),\ \int h\, d\nu_\theta = 0\}$, on a $\int g \cdot h\, d\lambda = \int p(g) \cdot h\, d\lambda = 0$ pour tout $(g,h) \in L^2(\mu) \times L^2_0(\nu_\theta)$.

(18) Montrer qu' il existe un ensemble borélien E avec $\mu(E) = 1$ tel que

$$\forall x \in E\ \forall y \in \mathbb{T}\ \forall \theta,\ \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} \delta_{(T^k x, R_\theta^k y)} \xrightarrow{n} \mu \times \nu_{y,\theta}$$

pour la topologie faible étoile sur $X \times \mathbb{T}$.

D'après le cours, l'ensemble E des points μ-génériques est de μ mesure totale (μ est ergodique car mélangeante). Pour $x \in E$ et $y \in \mathbb{T}$, toute limite faible-$*$ λ de $\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} \delta_{(T^k x, R_\theta^k y)}$ vérifie $\pi_X^* \lambda = \mu$ et $\pi_{\mathbb{T}}^* \lambda = \nu_{y,\theta}$. D'après la question précédente on a $\lambda = \mu \times \nu_{y,\theta}$.

(19) En déduire que pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue, il existe un ensemble borélien E avec $\mu(E) = 1$ tel que :

$$\forall x \in E\ \forall \theta \notin \mathbb{Z},\ \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} e^{2i\pi k\theta} f(T^k x) \xrightarrow{k} 0.$$

Il suffit d'appliquer la question précédente avec $y = 0$ et l'observable continue $(x,y) \mapsto e^{2i\pi y} f(x)$.

(20) Même question que la précédente pour $f \in L^1(\mu)$. Si f_p est une suite de fonction continues convereant vers f dans $L^1(\mu)$ on a pour μ presque tout x en appliquant le théorème de Birkhof à $|f - f_p|$:

$$\frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} |e^{2i\pi k\theta} f(T^k x) - e^{2i\pi k\theta} f_p(T^k x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} |f(T^k x) - f_p(T^k x)| \xrightarrow{n} \int |f - f_p|\, d\mu.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}\limsup_n \frac{1}{n} \left| \sum_{0 \leq k < n} e^{2i\pi k\theta} f(T^k x) \right| &\leq \limsup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} e^{2ik\pi\theta} f_p(T^k x) \right| + \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} |e^{2i\pi k\theta} f(T^k x) - e^{2i\pi k\theta} f_p(T^k x)|, \\ &\leq \int |f - f_p|\, d\mu \xrightarrow{p} 0.\end{aligned}$$

(21) <u>Question Bonus :</u> Identifier la limite à la question 14.

On a vu en TD, que la limite L^2 coincide avec le projecteur ortogonal sur $\{f \in L^2(\mu),\ f \circ T = e^{-i\theta} f\}$.