MAT551 201 **2022-2023**

Contrôle
Durée 3h

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir une très bonne note...

Exercice 1. *Développement en base* 10.
Dans le développement[1] en base 10 de $[0,1) \ni x = 0, a_1 a_2 \cdots$, quelle est la fréquence asympotique des 1, i.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sharp\{1\leqslant k\leqslant n,\ a_k=1\}}{n}$, pour Lebesgue presque tout point x de $[0,1]$. Justifiez très rapidement.

Solution: La réponse est $1/10$. On raisonne comme pour le raionememt en base 2. On considère l'application $x \mapsto 10x(mod\,1)$ sur l'intervalle. La mesure de Lebesgue est invariante et ergodique et on applique le théorème ergodique comme en base 2.

Exercice 2. *Mesures ergodiques.*
On note $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ le tore de dimension 2. Décrire l'ensemble des mesures ergodiques de $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{T}^2$.

Solution: Les cercles horizontaux sont fixes et sur chacun de ces cercles, on a une rotation d'angle y. On en déduit que les mesures ergodiques sont $\mathrm{Leb} \times \delta_y$ pour y irrationnel et les mesures périodiques $\mu_x^y \delta_y$ pour y rationnel avec μ_x^y la mesure périodique associé à l'orbite périodique de x pour la rotation d'angle y.

Exercice 3. *Sous-décalage en or.*
Soit $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites n'ayant pas deux 0 consécutifs. Calculer l'entropie du décalage sur X.

Solution: C'est un sous décalage de type fini, l'entropie est le log du rayon spectrale de la matrice d'adjacence qui est ici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rayon spectral de A est le nombre d'or.

1. développement décimal usuel

Problème 1. *Mesure absolument continue et mesure d'entropie maximale.*
On considère l'application $T_a : [0,1] \to [0,1]$ pour $a \in]0,1[$ fixé définie par

$$\begin{aligned} T_a(x) &= \tfrac{x}{a} \text{ pour } x \in [0,a[, \\ &= \tfrac{1-x}{1-a} \text{ pour } x \in [a,1]. \end{aligned}$$

On note Leb la mesure de Lebesgue sur l'intervalle et α la partition $\alpha := \{[0,a[,[a,1]\}$ de l'intervalle. Dans la suite α^n, $n \in \mathbb{N}^*$, désigne la partition itérée $\alpha^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} T_a^{-k}\alpha$. On notera α_x^n l'élément de α^n contenant $x \in [0,1]$. On rappelle que Leb est invariante et mélangante pour T_a (voir devoir maison).

1. Montrer que $\mathrm{Leb}(\alpha_x^n) = \frac{1}{|(T_a^n)'(x)|}$ pour Lebesgue presque tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Solution: Cela vient du fait que $T_a^n : \alpha_x^n \to [0,1]$ est affine surjective.

2. Calculer l'entropie $h_{T_a}(\mathrm{Leb},\alpha)$, puis $h_{T_a}(\mathrm{Leb})$.

   Solution: La mesure de Lebesgue étant mélangeante donc ergodique on peut appliquer la formule de Shanon-Macmilman-Breiman puis le thm ergodique pour avoir

   $$h_{T_a}(\mathrm{Leb},\alpha) = \int \log|T_a'|dx = -a\log a - (1-a)\log(1-a).$$

   Puisque $diam(\alpha^n) \xrightarrow{n} 0$, on a $h_{T_a}(\mathrm{Leb},\alpha) = h_{T_a}(\mathrm{Leb})$ d'après le théorème des générateurs de Sinai.

3. Montrer $h_{top}(T_a) = \log 2$.

   Solution: On peut utiliser la formule de l'entropie en fonction des branches n-monotones ou bien construire directement une semi-conjugaison préservant l'entropie de $(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\sigma)$ vers $([0,1],T_a)$, comme pour $a = 1/2$.

4. Soit μ une mesure ergodique d'entropie maximale. Justifiez que $\mu \perp \mathrm{Leb}$ si $a \neq 1/2$, i.e. μ et Leb sont étrangères. Qu'en est il si $a = 1/2$?

   Solution: Pour $a \neq 1/2$ ces deux mesures ergodiques sont d'entropie différentes, elles sont donc disctinctes et donc étrangères d'après le cours. Si $a = 1/2$, Lebesque est la mesure d'entropie maximale.

Problème 2. I. **Un recouvrement du cercle $\mathbb{T}$ associé à une rotation.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Pour $q \in \mathbb{N}$ on note $\|q\alpha\| = \min_{p\in\mathbb{Z}} |q\alpha - p|$. On pose $q_0 = 1$ et on définit par récurrence

$$q_n = \min\{q \in \mathbb{N}^*, \|q\alpha\| < \|q_{n-1}\alpha\|\}.$$

En particulier $\|q\alpha\| > \|q_n\alpha\|$ pour $q < q_n$. Dans la suite on note encore $\pm q_n\alpha \in \mathbb{T}$ les projetés sur le cercle de $\pm q_n\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $J_n =]-q_n\alpha, q_n\alpha[$ l'arc de cercle (ouvert) contenant 0 d'extrémités $\pm q_n\alpha$, ainsi que $J_n^- =]-q_n\alpha, 0]$ et $J_n^+ = [0, q_n\alpha[$ les sous arcs semi-ouverts de J_n d'extrémités $0, -q_n\alpha$ et $0, q_n\alpha$ respectivement. En particulier on a $J_n = J_n^+ \cup J_n^-$. Enfin on note f_α la rotation d'angle α sur le cercle.

(a) Montrer que $f_\alpha^k J_n^+$, $k = 0, \cdots, q_{n+1} - 1$, sont disjoint deux à deux. Puis de même avec J_n^- à la place de J_n^+.

Solution: Supposons J_n^+ relie 0 à $q_n\alpha$ dans le sens trigo, les autres cas étant similaire. Alors $f_\alpha^k J_n^+$ est l'arc orienté de $k\alpha$ à $(k+q_n)\alpha$. Si $f_\alpha^k J_n^+ \cap f_\alpha^l J_n^+ \neq \emptyset$ pour $k, l \in [0, q_n - 1[$ puis $\|(k-l)\alpha\| < |J_n^+| = \|q_n\alpha\|$. Mais $|k - l| < q_n$ ce qui contredit la définition de q_n.

(b) En déduire que tout point du cercle est contenue dans au plus deux arcs de cercle de la forme $f_\alpha^k J_n$, $k = 0, \cdots, q_{n+1} - 1$.

Solution: Si x appartient à trois arcs de la forme $f_\alpha^k J_n$, alors x appartient nécessairement soit à deux arcs de la forme $f_\alpha^k J_n^+$, soit à deux arc de la forme $f_\alpha^k J_n^-$. Mais ceci est impossible d'après la question précédente.

(c) Montrer que $f_\alpha^{q_{n+1}} J_n^+ \subset J_n$ et $f_\alpha^{q_{n+1}} J_n^- = f_\alpha^{q_{n+1}-q_n} J_n^+$.

Solution: Supposons J_n^+ relie 0 à $q_n\alpha$ dans le sens trigo, l' autre cas étant similaires. L'arc $f^{q_{n+1}} J_n^+$ relie $q_{n+1}\alpha$ (qui appartient à J_n par définition de q_{n+1}) à $(q_{n+1}+q_n)\alpha$. Si $q_{n+1}\alpha$ appartient à J_n^- alors cet arc est inclus dans J_n. Sinon $q_{n+1}\alpha \in J_n^+ \setminus \{0\}$ et $(f_\alpha^{q_{n+1}} J_n^+) \setminus J_n$ est dans l'arc $[q_n\alpha, (q_{n+1}+q_n)\alpha[\subset f_\alpha^{q_n} J_n^+$. Ce cas est impossible car d'après la question a) $f_\alpha^{q_{n+1}} J_n^+ \cap f_\alpha^{q_n} J_n^+ = f_\alpha^{q_{n+1}-q_n} (f_\alpha^{q_n} J_n^+ \cap J_n^+) = \emptyset$. Enfin on a clairement $J_n^+ = f_\alpha^{q_n} J_n^-$.

(d) En déduire que $\bigcup_{k=0,\cdots,q_{n+1}-1} f_\alpha^k \overline{J_n} = \mathbb{T}$.

Solution: D'après les question précédentes, on a $f_\alpha^{q_{n+1}} \overline{J_n} \subset \bigcup_{k=0,\cdots,q_{n+1}-1} f_\alpha^k \overline{J_n}$. Donc cette union est f_α-invariante, mais par minimalité des rotations irrationnelles, ce compact invariant est nécessairement tout le cercle.

On admettra dans la suite que les éléments q_n, $n \in \mathbb{N}^*$, appartiennent à

$$\mathcal{N}(\alpha) = \left\{ q \in \mathbb{N}^*,\ \exists p \in \mathbb{Z} \text{ with } p \wedge q = 1 \text{ and } |q\alpha - p| < \frac{1}{q} \right\}.$$

II. **Ergodicité des difféos C^2 de nombre de rotation irrationnel.**
Soit f un difféomorphisme du cercle de classe C^2 préservant l'orientation de nombre de rotation irrationnel α. Pour simplifier les notations, on écrira $|A|$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble borélien A de $\mathbb{T}$.

(a) En utilisant le théorème de Denjoy et la partie précédente, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in \mathbb{T}$ il existe un arc de cercle J contenant x de longueur inférieure à ϵ et un entier $q \in \mathcal{N}(\alpha)$ tels que :

— $\bigcup_{k=0,\cdots,q-1} f^k\overline{J} = \mathbb{T}$,
— tout point du cercle est contenue dans au plus deux arcs de cercle de la forme f^kJ, $k = 0,\cdots,q-1$.

Solution: D'après le théorème de Denjoy, f est conjugué à une rotation irrationnelle. Soit π cette conjugaison, $\pi\circ f_\alpha = f\circ\pi$. Quitte à prendre $\pi\circ f_\beta$ à la place de π avec $\pi(\beta) = x$ on peut supposer que $\pi(0) = x$. On prend alors $J = \pi(J_n)$ pour n assez grand, de sorte que $|J| < \epsilon$. On a $f^kJ = \pi\circ f_\alpha^k(J_n)$. Donc π étant bijective, les deux propriétés denmandées pour J suivent des propriétés correspondantes pour J_n établies en I.b) et I.d)

(b) On considère un ensemble borélien $\Lambda\subset\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue positive satisfaisant $\Lambda = f(\Lambda)$. Soit x un point de densité de Lebesgue de Λ. En utilisant l'inégalité de Denjoy (propriété de distorsion bornée), montrer qu'il existe $C > 0$ indépendant de ϵ tel que pour tout $k\in\mathcal{N}(\alpha)$ on a
$$\frac{|f^k(J\setminus\Lambda)|}{|f^kJ|}\leqslant C\frac{|J\setminus\Lambda|}{|J|}.$$

Solution: C'est une conséquence directe de la propriété de distorsion bornée comme on l'a vu plusieurs fois en cours.

(c) Vérifier que
$$|\mathbb{T}\setminus\Lambda|\leqslant\sum_{k=0,\cdots,q-1}|f^k(J\setminus\Lambda)|.$$

Solution: Puisque les ensembles $f^k(\overline{J})$ recouvrent $\mathbb{T}$ on a
$$|\mathbb{T}\setminus\Lambda|\leqslant\sum_{k=0,\cdots,q-1}|f^k(J)\setminus\Lambda)|.$$
Puis, par invariance de Λ, on obtient
$$|\mathbb{T}\setminus\Lambda|\leqslant\sum_{k=0,\cdots,q-1}|f^k(J\setminus\Lambda)|.$$

(d) Conclure avec a), b), c) que $|\Lambda| = 1$.

Solution: En fait a) ne suffit pas, montrons que
$$\frac{|f^k(J\setminus\Lambda)|}{|f^kJ|}\leqslant C\frac{|J\setminus\Lambda|}{|J|}.$$
pour tout $k = 0,\cdots,q-1$. Il suffit de vérifier que pour un tel k et pour tout $x,y\in J$
$$\frac{|(f^k)'(x)|}{|(f^k)'(y)|}\leqslant C$$

Mais on a d'après l'inégalité des accroissement finis

$$\begin{aligned}
\left|\log|(f^k)'(x)| - \log|(f^k)'(y)|\right| &\leqslant \sum_{l=0}^{k-1} \left||\log|f'(f^l x)| - \log|f'(f^l y)|\right|, \\
&\leqslant \|(\log|f'|)'\|_\infty \sum_{l=0}^{q-1} |f^l J|, \\
&\leqslant 2\|(\log|f'|)'\|_\infty,
\end{aligned}$$

où la dernière étape vient du fait que tout point appartient au plus à deux $f^l J$. On a alors

$$\begin{aligned}
|\mathbb{T} \setminus \Lambda| &\leqslant \sum_{k=0,\cdots,q-1} |f^k(J \setminus \Lambda)|, \\
&\leqslant \sum_{k=0,\cdots,q-1} \frac{|f^k(J \setminus \Lambda)|}{|f^k J|} |f^k J|, \\
&\leqslant C\frac{|J \setminus \Lambda|}{|J|} \sum_{k=0,\cdots,q-1} |f^k J|, \\
&\leqslant 2C\frac{|J \setminus \Lambda|}{|J|}.
\end{aligned}$$

On conclut que $|\mathbb{T} \setminus \Lambda| \leqslant 2C\frac{|J\setminus\Lambda|}{|J|}$ avec C indépendant de ϵ. Le point x étant un point de densité de Λ, on obtient $|\mathbb{T} \setminus \Lambda| = 0$.

III. **Un exemple sans mesure absolument continue.**
On considère l'application $G : [0,1] \to [0,1]$ affine par morceaux avec $G(0) = 0$, $G(1/3) = 2/3$ et $G(1) = 1$. On prolonge G sur $\mathbb{R}$ de sorte que $G(x+1) = G(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ telle que $G + b$ induit un homéomorphisme apériodique du cercle. Dans la suite on choisit un tel b et on note g l'homéomorphisme du cercle $\mathbb{T}$ associé. *Indications :* on pourra utiliser les deux faits suivants démontrés en TD :
— $F \mapsto \rho(F)$ est continue,
— $\rho(G + 1/3) = 1/2$.

Solution: On a $\rho(G) = 0$ et $\rho(G+1/3) = 1/2$. Par continuité du norme de rotation il existe $b \in (0, 1/3)$ tel que $\rho(G + b)$ soit irrationnel. L'homéo du cercle associé à $G + b$ est alors apériodique d'après le cours.

(b) On suppose que g admet une mesure invariante μ absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue. Notons $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ sa densité, i.e. $\mu(A) = \int_A \phi(x)\,dx$ pour tout borélien A. Montrer que pour Lebesgue presque tout x on a

$$\phi(x) = \phi \circ g(x) \times g'(x).$$

Solution: Pour tout borélien A,

$$\begin{aligned}\mu(g^{-1}A) &= \mu(A),\\ \int_{g^{-1}A} \phi\, dx &= \int_A \phi\, dx,\\ \int_A \phi \circ g \times g'\, dx &= \int_A \phi\, dx.\end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout A on a $\phi(x) = \phi \circ g(x) \times g'(x)$ pour Lebesque presque tout x.

(c) On note $K = \{\phi > 0\}$ et on considère pour $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\psi(x) =& \sin\left(a + \pi \frac{\log \phi(x)}{\log 2}\right) && \text{pour } x \in K,\\ \psi(x) =& 0 && \text{pour } x \notin K.\end{aligned}$$

Vérifier que $\psi \circ g(x) = -\psi(x)$ pour Lebesgue presque tout x.

Solution: Remarquez que $\log g'(x) = \pm \log 2$ si bien qu'avec $\phi(x) = \phi \circ g(x) \times g'(x)$, on a

$$\begin{aligned}\psi \circ g(x) &= \sin\left(a + \pi \frac{\log \phi(x)}{\log 2} \pm \pi\right),\\ &= -\psi(x).\end{aligned}$$

(d) On admet que le résultat de la partie II s'applique à des dynamiques C^2 par morceaux. Montrer que ψ est constante Lebesgue presque partout. <u>*Indications :*</u> on pourra considérer $\Lambda = \{x \in \mathbb{T},\ \psi(x) \geqslant c\}$ pour $c \in \mathbb{R}$ pour la dynamique de $g \circ g$.

Solution: Observez que $\psi \circ g^2 = \psi$ et que le résultat de la partie II se généralise en utilisant l'absolue continuité de f à des ensembles quasi-invariants , i.e. $|\Lambda \Delta f(\Lambda)| = 0$ (avec Δ la différence symétrique). On raisonne ensuite comme dans la preuve de la proposition 2.7 du polycopié en appliquant la partie II. On en déduit que ψ est constante pour Lebesgue presque tout x.

(e) Conclure que g n'admet pas de mesure invariante μ absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue.

Solution: Puisque $\psi \circ g(x) = -\psi(x)$ pour Lebesgue presque tout x, cette constante est forcément nulle. Donc $a + \pi \frac{\log \phi(x)}{\log 2} \in \pi\mathbb{Z}$ lebesgue presque partout. Mais a a été choisi de façon arbitraire... c'est impossible !

FIN