Contrôle
Durée 3h

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir une très bonne note...

Exercice 1.

Soit β le nombre d'or, i.e. $\beta > 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$. On pose

$$f : [0,1] \to [0,1],$$
$$x \mapsto \beta x \ (mod\ 1)$$

On considère la mesure $\mu = \int k\ dx$ de densité k par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ définie par

$$k(x) = \frac{1}{\beta^{-1} + \beta^{-3}} \text{ pour } x \in [0, \beta^{-1}],$$
$$k(x) = \frac{1}{\beta(\beta^{-1} + \beta^{-3})} \text{ pour } x \in]\beta^{-1}, 1].$$

1. Vérifier que μ est une mesure de proba f-invariante.

   Solution: C'est bien une probabilité. Pour tout Borel $A \subset [0, \beta^{-1}]$ on a $f^{-1}A = \beta^{-1}A \coprod (\beta^{-1} + \beta^{-1}A)$ et donc $\mu(f^{-1}A) = Leb(A)\beta^{-1}\frac{1+\beta^{-1}}{\beta^{-1}+\beta^{-3}} = \frac{Leb(A)}{\beta^{-1}+\beta^{-3}} = \mu(A)$. Enfin si $A \subset [\beta^{-1}, 1]$, on a $f^{-1}A = \beta^{-1}A \subset [0, \beta^{-1}]$ et donc $\mu(f^{-1}A) = Leb(A)\beta^{-1}\frac{1}{\beta^{-1}+\beta^{-3}} = \mu(A)$.

2. On note P la partition $P = \{[0, \beta^{-1}],]\beta^{-1}, 1]\}$. Justifiez que P est génératrice.

   Solution: On vérifie facilement par récurence que $diam(P^n) \leqslant \beta^{-n}$.

3. Montrer que le cardinal de $P^n = \bigvee_{0 \leqslant k < n} f^{-k}P$ vérifie pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\sharp P^{n+2} = \sharp P^{n+1} + \sharp P^n$$

   Indications : On pourra remarquer que pour $A \in P^n$, on a (aux extrémités près) soit $f^n(A) = (0,1)$, soit $f^n A = (0, \beta^{-1})$.

   Solution: On note

$$P_0^n = \left\{ A = \bigcap_{0 \leqslant k < n} f^{-k}A_k \in P^n,\ A_{n-1} = [0, \beta^{-1}] \right\}$$

   et

$$P_1^n = \left\{ A = \bigcap_{0 \leqslant k < n} f^{-k}A_k \in P^n,\ A_{n-1} =]\beta^{-1}, 1] \right\}$$

   Si $A \in P_0^n$, alors $f^n A = (0,1)$ et donc il y a deux éléments de P^{n+1} qui intersecte A. Si $A \in P_1^n$, on a $f^n A = (0, \beta^{-1})$ et donc il n'y a qu'un $B \in P^{n+1}$ intersectant A et $f^n B = (0, \beta^{-1})$. Donc on a $\sharp P^{n+1} = 2\sharp P_0^n + \sharp P_1^n$ et $\sharp P_0^{n+1} = \sharp P^n$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \sharp P^{n+1} &= 2\sharp P_0^n + \sharp P_1^n, \\ &= \sharp P^n + \sharp P_0^n, \\ &= \sharp P^n + \sharp P^{n-1} \end{aligned}$$

4. En déduire l'entropie de μ.

Solution: D'après le cours, on a $h(\mu) = \lim_n \frac{H_\mu(P^n)}{n} \leqslant \lim_n \frac{\log \sharp P^n}{n} = \log \beta$, car la suite de Fibonacci croit expoenentiellement en β. De plus tout élément de P^n est un intervalle de longueur inférieur à β^{-n} et donc

$$\begin{aligned} H_\mu(P^n) &= \int -\log \mu(P^n(x))\, d\mu(x), \\ &\geqslant C_{ste} + \int -\log Leb(P^n(x))\, d\mu(x), \\ &\geqslant C_{ste} + n \log \beta. \end{aligned}$$

On en déduit que $h(\mu) = \log \beta$.

5. <u>Bonus :</u> Pour $x \in [0,1]$, on note $\Phi(x) = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ avec $x_k = 0$ si $f^k x \in [0, \beta^{-1}]$ et $x_k = 1$ sinon. Identifier $\Phi_*\mu = \mu(\Phi^{-1}\cdot)$.

Solution: $\Phi_*\mu$ est une mesure invariante du sous décalage de type fini transitif de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, où l'on a interdit le mot 11. Celui-ci étant d'entropie $\log \beta$, on en déduit que $\Phi_*\mu$ est la mesure d'entropie maximale, i.e la mesure de Parry, de ce SFT.

Exercice 2.

Soit (Y, σ) un sous-décalage, i.e. $Y \subset \{0, \cdots, K\}^{\mathbb{Z}}$ est fermé et vérifie $\sigma(Y) = Y$ pour le décalage σ. On rappelle que $\mathcal{L}_n(Y)$ désigne l'ensemble des mots de Y de longueur n.

1. Montrer que le sous-ensemble Y_n des suites $(x_k)_k$ de $\{0, \cdots, K\}^{\mathbb{Z}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n-1} \in \mathcal{L}_n(Y)$$

définit un sous-décalage de type fini.

Solution: Y_n est le sous décalage de type fini, où l'on a interdit les n-mots qui ne sont pas dans $\mathcal{L}_n(Y)$.

2. Justifier succintement que $h_{top}(Y_n, \sigma) \geqslant h_{top}(Y, \sigma)$.

Solution: L'entropie topologique d'un sous-système est toujours inférieure ou égale à celle du système initiale.

3. Montrer que $h_{top}(Y_n, \sigma) \xrightarrow{n\to+\infty} h_{top}(Y, \sigma)$.

Solution: Par le même argument qu' à la question précédente, on voit que $h_{top}(Y_n)$ décroit en n. De plus on a vu en cours que $h_{top}(Y) = \lim_n / \inf_n \frac{\log \sharp \mathcal{L}_n(Y)}{n}$. Mais $\mathcal{L}_n(Y) = \mathcal{L}_n(Y_n)$, donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que

$$\begin{aligned} h_{top}(Y) &\geqslant \frac{\log \sharp \mathcal{L}_N(Y)}{N} - \epsilon, \\ &\geqslant \frac{\log \sharp \mathcal{L}_N(Y_N)}{N} - \epsilon, \\ &\geqslant h_{top}(Y_N) - \epsilon. \end{aligned}$$

Problème 1. *Théorème de Kopell.*

Le but de ce problème est de montrer le résultat suivant dû à Kopell.

Théorème.

Soit $f : [0, +\infty[\circlearrowleft$ un difféomorphisme de classe C^2 avec 0 pour seul point fixe. On considère $g : [0, +\infty[\circlearrowleft$ un difféomorphisme de classe C^1 satisfaisant $g \circ f = f \circ g$. Si g a un point fixe autre que 0, alors g est l'identité.

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où
$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) < x.$$

Solution: Quitte à remplacer f par f^{-1}.

On se place désormais dans ce cas et on suppose que $g(x_0) = x_0$ avec $x_0 \neq 0$.

2. Vérifier que $f^n(x_0)$ est un point fixe de g pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution: Puisque f et g commutent on a $g \circ f^n(x_0) = f^n \circ g(x_0) = f^n(x_0)$.

3. Montrer que
$$f^n(x_0) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Solution: Puisque $f(x) < x$ pour tout $x > 0$, la suite $(f^n(x_0))_n$ est positive décroissante. Sa limite est un point fixe de f par continuite de f, c'est donc forcément 0.

4. En déduire que $g'(0) = 1$.

Solution: On a $g(f^n x_0) = f^n x_0 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. D'où
$$g'(0) = \lim_n \frac{g(f^n x_0) - g(0)}{f^n x_0 - 0} = 1.$$

5. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, il existe $C(x) > 0$ tel que
$$\forall y, z \in [f(x), x[, \quad \left|\frac{(f^n)'(y)}{(f^n)'(z)}\right| \leqslant C(x).$$

Solution: La fonction f étant de classe C^2 on a avec $c(x) = \sup_{y\in[0,x]} |(\log f')'(y)|$
$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n} \log|f'(f^k y)| - \log|f'(f^k z)| &\leqslant c(x) \sum_{0\leqslant k<n} |f^k y - f^k z|,\\ &\leqslant c(x)\cdot x.\end{aligned}$$

6. Montrer que pour tout $y > 0$ et pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{(g^k)'(y)}{(g^k)'(f^n y)} = \frac{(f^n)'(y)}{(f^n)'(g^k y)}$$

Solution: Il suffit de dériver $g^k \circ f^n = f^n \circ g^k$.

7. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $y \in [f(x_0), x_0[$ on a
$$|(g^k)'(y)| \leqslant C.$$

Solution: On applique la question précédente. A k fixé le terme de droite tend vers $(g^k)'(y)$ quand n tend vers l'infini. Le terme de gauche est borné en valeur absolue par $C(x_0)$ d'après le controle de la distorsion obtenu en 3.

8. On suppose qu'il existe $z \in [f(x_0), x_0[$ tel que $g(z) \neq z$. Montrer que
$$\sup_{y\in[f(x_0),x_0]} |(g^k)'(y)| \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty.$$

Solution: Remarquez d'abord que g préserve $[f(x_0), x_0]$. Soit $]v, w[$ un sous intervalle maximal de $[f(x_0), x_0]$ sur lequel g n'a pas de point fixe. En particulier $g(v) = v$ et $g(w) = w$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $g(y) > y$ pour tout $y \in]v, w[$. Alors $g^k(y) \xrightarrow{k} w > y$ avec $g(w) = w \leqslant x_0$. L'inégalité des accroissement finis donne

$$\left|\frac{w-v}{y-v}\right| \xleftarrow{k} \left|\frac{g^k(y)-v}{y-v}\right| = \left|\frac{g^k(y)-g^k(v)}{y-v}\right| \leqslant \sup_{z\in[f(x_0),x_0[} |(g^k)'(z)|$$

On conclut en prenant y arbitrairement proche de v.

9. Conclure la preuve du Théorème de Kopell.

Solution: Il suit de 6 et 7 que g coincide avec l'identité sur $[fx_0, x_0[$. On conclut en remplacant x_0 par $f^k x_0$ avec $k \in \mathbb{Z}$ puisque $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [f^{k+1}(x_0), f^k(x_0)[$.

Problème 2. *Propriétés génériques des mesures ergodiques.*

On considère $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ muni du décalage σ. On rappelle que $\mathcal{M}(X, \sigma)$ désigne le compact (pour la topologie faible $*$) des mesures de proba boréliennes σ-invariantes. On note également $\mathcal{M}_e(X, \sigma)$ le sous-ensemble formé des mesures ergodiques (muni de la topologie induite de $\mathcal{M}(X, \sigma)$). Enfin, on appelle mesures périodiques les mesures de la forme $\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant k<n} \delta_{\sigma^k x}$ avec $\sigma^n(x) = x$.

1. Donner un exemple de mesure $\mu \in \mathcal{M}_e(X, \sigma)$ d'entropie non nulle et de support total (i.e. $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert U de X).

Solution: Il suffit de considérer la mesure de Bernoulli de parametre $(1/2, 1/2)$.

2. Donner un exemple de mesure $\mu \in \mathcal{M}(X, \sigma)$ (pas forcément ergodique) d'entropie nulle et de support total. Indications : on pourra construire une telle mesure à partir de mesures périodiques.

Solution: Pour w un mot fini, on note ν_w la mesure periodique associée à la suite périodique $\cdots wwwww \cdots$. Si $(w_n)_n$ est une énumération dénombrable des mots finis alors $\nu = \sum_n \frac{1}{2^n}\nu_{w_n}$ est de support total et vérifie $h(\nu) = \sum_n \frac{1}{2^n} h(\nu_{w_n}) = 0$ car les mesures périodiques sont d'entropie nulle et car l'entropie est une fonction affine en la mesure.

3. Montrer que toute mesure ergodique est limite de mesures périodiques. Indications : Pour $\mu \in \mathcal{M}_e(X, \sigma)$ on pourra considérer un point générique $x \in X$ pour μ, i.e. tel que $\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant k<n} \delta_{\sigma^k(x)} \xrightarrow{n\to\infty} \mu$.

Solution: Soit $x = (x_n)_n$ générique pour μ et soit ν_n la mesure périodique associé au mot fini $x_0 \cdots x_n$. Alors on vérifie que $\nu_n \xrightarrow{n} \mu$ pour la topologie faible-$*$. Il suffit de montrer que $\nu_n([w]) \xrightarrow{n} \mu([w])$ pour tout mot fini w. Pour w fixé on a lorsque n est assez grand $\mu([w]) \simeq \frac{1}{n}\sharp\{0 \leqslant k < n - |w|,\ x_k \cdots x_{k+|w|-1} = w\} \simeq \nu_n([w])$.

4. On rappelle que $\limsup_{\nu\to\mu} h(\nu) \leqslant h(\mu)$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X, \sigma)$. Montrer que pour tout $a > 0$, l'ensemble $\{\mu \in \mathcal{M}_e(X, \sigma),\ h(\mu) < a\}$ contient un ouvert dense de $\mathcal{M}_e(X, \sigma)$.

Solution: Si ν est une mesure périodique, elle est d'entropie nulle et donc la propriété de semi-continuité supérieure de l'entropie rappelée dans l'énoncé entraîne qu'il existe un voisinage ouvert O_ν de ν tel que $h(\mu) < a$ pour tout $\mu \in O_\nu$. L'ouvert $O = \bigcup_{\nu \text{ périodique}} O_\nu$, qui est dense d'après la question précédente, convient.

5. Montrer que pour tout mot fini w, l'ensemble $\{\mu \in \mathcal{M}_e(X, \sigma),\ \mu([w]) > 0\}$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_e(X, \sigma)$, où $[w]$ est le cylindre associé à w, i.e. $[w] = \{(x_n)_n \in X,\ x_0 \cdots x_{|w|-1} = w\}$.

Solution: On peut à la question 3, prendre la mesure périodique (donc ergodique) ν_n associée à la concatenation $w \cdot x_0 \cdots x_n$. On a toujours $\nu_n \xrightarrow{n} \mu$ et on a aussi $\forall n,\ \nu_n([w]) > 0$.

6. On admet que $\mathcal{M}_e(X, \sigma)$ est un espace de Baire[1] (pour la topologie induite). Montrer que les mesures ergodiques d'entropie nulle et de support total sont denses dans $\mathcal{M}_e(X, \sigma)$.

   Solution: On note

$$U_n := \{\mu \in \mathcal{M}_e(X, \sigma),\ \mu([w_n]) > 0\}$$
$$V_n := \{\mu \in \mathcal{M}_e(X, \sigma),\ h(\mu) < 1/n\}$$

   On a vu que ces ensembles contenaient des ouverts denses de $\mathcal{M}_e(X, \sigma)$. Par la propriété de Baire, $\bigcap_n U_n \cap V_n$ est dense dans $\mathcal{M}_e(X, \sigma)$.

7. Reprendre rapidement les questions 1., 2. et 3., lorsque X est un sous décalage de type fini transitif.

   Solution: La mesure de Parry est aussi de support total. De plus l'argument sur la densité des mesures périodiques s'etend facilement au cas des SFT.

1. un espace de Baire est un espace topologique où toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense