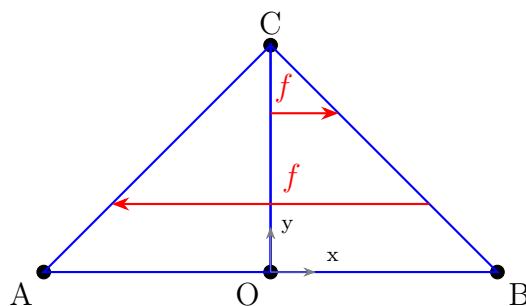


Contrôle
Durée 3h

Documents autorisés : photocopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

Exercice 1.

Soit ABC le triangle plein du plan $\mathbb{R}^2$ avec $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (0, 1)$. On note $O = (0, 0)$ l'origine. On considère l'application $f : ABC \rightarrow ABC$ continue affine par morceaux, telle que f est affine sur AOC et BCO avec $f(A) = A$, $f(C) = C$, $f(O) = B$ et $f(B) = A$. On note $T_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ l'application tente de pente 2, définie par $T_2(x) = 2x$ pour $x \in [0, 1/2]$ et $T_2(x) = 2 - 2x$ pour $x \in [1/2, 1]$. On rappelle que $h_{top}(T_2) = h(\text{Leb}_{[0,1]}) = \log 2$.



1. Montrer que pour toute mesure invariante ergodique μ de (ABC, f) , il existe $\nu \in \mathcal{M}([0, 1], T_2)$ tel que les systèmes probabilistes $(ABC, \mathcal{B}_{bor}, f, \mu)$ et $([0, 1], \mathcal{B}_{bor}, T_2, \nu)$ soient isomorphes. On pourra remarquer que $f(\{y = a\} \cap ABC) = \{y = a\} \cap ABC$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Solution: Les segments horizontaux étant invariants, toute mesure ergodique donne une mesure totale à un de ces segments. Enfin la dynamique sur ces segments est conjuguée à T_2 .

2. Calculer l'entropie topologique de (ABC, f) .

Solution: Par le principe variationnel, $h_{top}(T_2) = \log 2$, et le fait que l'entropie des mesures est préservée par isomorphisme, on obtient que $h_{top}(f) = \log 2$.

3. Montrer qu'il existe une infinité de mesures d'entropie maximale.

Solution: Si μ_k désigne la mesure d'entropie maximale de la restriction de f au segment horizontal d'ordonnée $1 - 1/k$ (c'est juste la mesure de Lebesgue sur ces intervalles), on a $h(\mu_k) = \log 2 = h_{top}(f)$.

4. Trouver une suite convergente $(\mu_k)_k$ de mesures de probabilité boréliennes invariantes, telle que la limite μ vérifie $0 = h(\mu) < \limsup_k h(\mu_k) = h_{top}(f)$.

Solution: On a $\mu_k \xrightarrow{k} \delta_C$ et $h(\delta_C) = 0$.

Problème 1. *Sous-décalages sofiques.*

Dans la suite $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ désignent des alphabets finis.

1. Soient $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et $Y \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ des sous-décalages. On rappelle que $L_n(X)$ désigne les mots de longueur n apparaissant dans X . De plus on notera $L(X) = \bigcup_n L_n(X)$.

- a. Soit $\phi : Y \rightarrow X$ une application continue. Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ et une application $\Phi : L_{2r+1}(Y) \rightarrow \mathcal{B}$ telle que

$$\forall y = (y_k)_k \in Y, (\phi(y))_0 = \Phi(y_{-r} \cdots y_r)$$

Solution: Par uniforme continuité de ϕ il existe r tel que $d(x, y) < 1/2^r$ entraîne $(\phi(x))_0 = (\phi(y))_0$ pour la distance usuelle d sur $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$. Mais pour cette distance si $x_k = y_k$ pour $k = -r, \dots, r$ on a $d(x, y) < 1/2^r$. Donc on peut poser $\Phi(y_{-r} \cdots y_r) = (\phi(y))_0$ pour tout $y = (y_k)_k$ in Y .

b. On suppose de plus que $\phi \circ \sigma = \sigma \circ \phi$. Montrer que

$$\forall y = (y_k)_k \in Y \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\phi(y))_n = \Phi(y_{-r+n} \cdots y_{r+n})$$

Solution: Direct

2. Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe orienté fini, donné par un ensemble fini de sommets $\mathcal{V}$ et un ensemble fini d'arêtes orientées $\mathcal{E}$ (on autorise les multiboucles : i.e. pour deux sommets donnés v et v' il peut y avoir plusieurs arêtes de v vers v'). Pour une arête orientée $e \in \mathcal{E}$, on note $i(e)$ (resp. $t(e)$) le sommet d'où part e (resp. où arrive e). Pour $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$, on note $\mathcal{G}$ le **graphe étiqueté** $(G, \mathcal{L})$: on marque chaque arête e par une lettre $\mathcal{L}(e)$ de $\mathcal{A}$ appelée l'étiquette. On définit la **complexité** $|\mathcal{G}|$ de $\mathcal{G}$ comme le cardinal de $\mathcal{E}$. On considère les sous-ensembles respectifs X^G et $X^{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{E}^{\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ définis par

$$X^G = \{(e_k)_k \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}}, \forall k \ t(e_k) = i(e_{k+1})\}$$

$$X^{\mathcal{G}} = \{(a_k)_k \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \exists (e_k)_k \in X^G \text{ avec } \forall k \ \mathcal{L}(e_k) = a_k\}$$

Vérifiez que X^G et $X^{\mathcal{G}}$ sont des sous-décalages et que X^G est de type fini.

On dira qu'un sous-décalage X est **sofique** s'il existe $\mathcal{G}$ avec $X = X^{\mathcal{G}}$ et que $\mathcal{G}$ est une **présentation** de X .

3. Montrer que X^G est sofique pour tout graphe orienté fini G .

Solution: Si G est un graphe orienté fini, il suffit de considérer l'étiquette $\mathcal{L}(e) = e$ pour tout $e \in \mathcal{E}$. Alors $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ vérifie $X^{\mathcal{G}} = X^G$.

4. Montrer que le sous-décalage sofique $X^{\mathcal{G}}$, avec $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$, est facteur du sous-décalage de type fini X^G , i.e. il existe une application continue surjective (semi-conjugaison) $\pi : X^G \rightarrow X^{\mathcal{G}}$ telle que $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$.

Solution: On prend pour facteur l'application $\pi : X^G \rightarrow X^{\mathcal{G}}$ défini par $\pi((e_n)_n) = (\mathcal{L}(e_n))_n$.

5. Un graphe orienté fini étiqueté $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$, avec $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, est dit **résolvant** si pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $a \in \mathcal{A}$, il existe au plus une arête $e \in \mathcal{E}$ partant de v avec $\mathcal{L}(e) = a$. Montrer que pour tout sous-décalage sofique X admet une présentation résolvente.

Indications : On pourra considérer le graphe orienté fini $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ avec $\mathcal{V}'$ égal à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ des parties de $\mathcal{V}$, et on définira une arête de I vers J avec $I, J \in \mathcal{P}(\mathcal{V})$ lorsqu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que

$$J = \{j \in \mathcal{V}, \exists e \in \mathcal{E} \text{ avec } i(e) \in I, t(e) = j \text{ et } \mathcal{L}(e) = a\}.$$

Solution: Pour le graphe donné dans l'indication, on prend pour étiquette $\mathcal{L}'(e)$ la lettre a associé à l'arête $e \in \mathcal{E}'$. Le graphe étiqueté $(G', \mathcal{L}')$ est résolvant par construction. On vérifie facilement que $X^{\mathcal{G}'} = X^{\mathcal{G}}$.

6. Soit $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$, avec $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, un graphe orienté étiqueté fini résolvant. Montrer que $X^{\mathcal{G}}$ est facteur de X^G via une semi-conjugaison $\pi : X^G \rightarrow X^{\mathcal{G}}$ satisfaisant

$$\forall x \in X^{\mathcal{G}}, \# \pi^{-1}\{x\} \leq \#\mathcal{V}.$$

Solution: Dans un graphe étiqueté résolvant, une fois la suite des étiquettes et le sommet de départ fixé il y a exactement un chemin dans G dont les étiquettes représentent la suite donnée.

7. Soit X un sous-décalage sofique. Soit $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$, avec $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, une présentation résolvante de X de complexité minimale, i.e. toute présentation résolvante $\mathcal{G}'$ de X satisfait $|\mathcal{G}'| \geq |\mathcal{G}|$.

- a. Montrer que pour tout $e \in \mathcal{E}$, il existe $w_e \in L(X)$ tel que tout mot u de $X^{\mathcal{G}}$ avec $\mathcal{L}(u) = w_e$ contient la lettre e . On pourra raisonner par l'absurde pour contredire la minimalité de $\mathcal{G}$.

Solution: On raisonne par l'absurde. Supposons qu'une arête $e \in \mathcal{E}$ ne vérifie pas la propriété voulue. Alors si on enlève cette arête au graphe étiqueté $\mathcal{G}$, le graphe $\mathcal{G}'$ ainsi obtenu satisfait encore $X = X^{\mathcal{G}'}$ et est résolvant comme sous-graphe d'un graphe résolvant. Cela contredit la minimalité de la complexité de $\mathcal{G}$ parmi les représentations résolvantes de X .

- b. Montrer que si $X^{\mathcal{G}}$ est topologiquement transitif, alors X^G l'est aussi.

Solution: Soient $e, e' \in \mathcal{E}$. Puisque $X^{\mathcal{G}}$ est transitif, il existe $w' \in L(X^{\mathcal{G}})$ tel que $w_e w' w_{e'} \in L(X^{\mathcal{G}})$. Il existe u, u', u'' avec $uu'u'' \in L(X^{\mathcal{G}})$ et $\mathcal{L}(u) = w_e$, $\mathcal{L}(u') = w'$ et $\mathcal{L}(u'') = w_{e'}$. Par définition de w_e et $w_{e'}$, les mots u et u'' contiennent respectivement les lettres e et e' . Donc on peut relier e et e' dans X^G . Ceci étant vrai pour tout e, e' , le sous-décalage X^G est aussi transitif.

8. Expliquer pourquoi un sous-décalage sofique topologiquement transitif a une unique mesure d'entropie maximale.

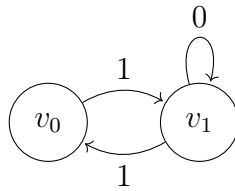
Solution: On considère une présentation $\mathcal{G}$ résolvante minimale de X . D'après les questions précédentes, le sous-décalage de type fini transitif X^G est une extension à fibres finies de $X^{\mathcal{G}}$. D'après le cours, X^G a une unique mesure d'entropie maximale et l'entropie des mesures est préservée par une extension à fibres finies. Il s'en suit que $X^{\mathcal{G}}$ a aussi une unique mesure d'entropie maximale.

9. Soit G un graphe fini orienté. Montrer à l'aide de la question 1, que si un sous-décalage (X, σ) de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est facteur de X^G , alors (X, σ) est sofique.

Indications : Si $\Phi : L_{2r+1}(X^G) \rightarrow \mathcal{A}$ est l'application associée au facteur donné par la question 1, on pourra chercher une présentation $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ de X , avec $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, satisfaisant $\mathcal{V} = L_{2r+1}(X^G)$ et $\mathcal{L} = \Phi$.

Solution: On prend $\mathcal{V} = L_{2r+1}(X^G)$ et on pose une unique arête $e_{v,v'} \in \mathcal{E}$ de v vers v' ssi $[v] \cap \sigma^{-1}[v'] \neq \emptyset$. Enfin on considère l'étiquette $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ définie par $\mathcal{L}(e_{v,v'}) = \Phi(v)$. On vérifie facilement que $X^{\mathcal{G}} = X$.

10. On considère le graphe orienté étiqueté $\mathcal{G}$ suivant ($\mathcal{V} = \{v_0, v_1\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}, \dots$) :



Montrer que le sous-décalage sofique $X^{\mathcal{G}} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ associé n'est pas de type fini. Calculer l'entropie topologique de $X^{\mathcal{G}}$.

Solution: $X^{\mathcal{G}}$ n'est pas de type fini car on interdit tous les mots $01^{2k+1}0$ pour $k \in \mathbb{N}$. De plus $X^{\mathcal{G}}$ est une extension à fibre finie de X^G et $h_{top}(X^G) = h_{top}(X^{\mathcal{G}}) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Exercice 2.

On rappelle que toute application continue du cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admet un relèvement $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, f(\bar{x}) = \overline{F(x)}$, où $\mathbb{T}^1 \ni \bar{x} = x \pmod{1}$. L'entier $F(x+1) - F(x)$ ne dépend pas du choix de F et est appelé le degré de f .

1. On étend $\mathcal{L}$ à $L(X^G)$ en définissant $\mathcal{L}(e_k \cdots e_l) = \mathcal{L}(e_k) \cdots \mathcal{L}(e_l)$.

On considère une application f de classe $\mathcal{C}^2$ du cercle $\mathbb{T}^1$. Dans ce cas tout relèvement F est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ et on note $f'(\bar{x}) = F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{T}^1, f'(\bar{x}) \geq \lambda > 1.$$

1. Montrer que le degré d de f est supérieure ou égal à 2.

Solution: $d = F(1) - F(0) = \int_0^1 f'(t) dt \geq \lambda > 1$

2. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des applications continues croissantes H de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $H(t+1) = H(t) + 1$. On munit $\mathcal{H}$ de la distance $D(H, G) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |H(t) - G(t)|$. A l'aide du théorème de point fixe de Picard, montrer qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $d \times H = H \circ F$.

Solution: $(\mathcal{H}, d)$ est métrique complet. Par le théorème de point fixe, il suffit de remarquer que $\mathcal{H} \ni H \mapsto \frac{1}{d} H \circ F$ est $1/d$ -contractant pour la distance D .

3. Montrer que H est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$. On pourra remarquer que $H^{-1}(\{x\})$ est un intervalle pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution: Si $I_x = H^{-1}(\{x\})$ n'est pas réduit à un point, $|F(I_x)|$ est plus grand que $\lambda |I_x|$ mais $H \circ F(I_x) = dH(I_x) = dx$, i.e. $F(I_x) \subset I_{dx}$. Donc $\sup_x |I_x| = +\infty$ ce qui contredit que $H(t+1) = H(t) + 1$ pour tout t .

4. En déduire que $h_{top}(f) = \log d$, puis que f a une unique mesure d'entropie maximale. On pourra commencer par rappeler le cas où f est l'application $f_d : \bar{x} \mapsto d \times \bar{x}$.

Solution: L'application H descend sur le cercle en un homéomorphisme h qui vérifie $h \circ f = f_d \circ h$. Autrement dit f et f_d sont conjugués. Mais on a vu que f_d est d'entropie topologique $\log d$ avec Leb l'unique mesure d'entropie maximale. Il en est donc de même pour f par invariance de l'entropie par conjugaison.

5. On admet que f admet une mesure de probabilité ergodique invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mu = \rho d\text{Leb}$ avec ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant $0 < \inf_x \rho(x) \leq \sup_x \rho(x) < +\infty$. Vérifiez que $\psi_* \mu = \text{Leb}$ avec $\psi(x) = \int_0^x \rho(t) dt$.

Solution: L'application ψ est difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$. Il suffit d'observer que pour tout x on a

$$(\psi^{-1})_* \text{Leb}([0, x]) = \text{Leb}(\psi([0, x])) = \psi(x) = \mu([0, x]).$$

6. On suppose que $h(\mu) = h_{top}(f)$. Montrer que H est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$.

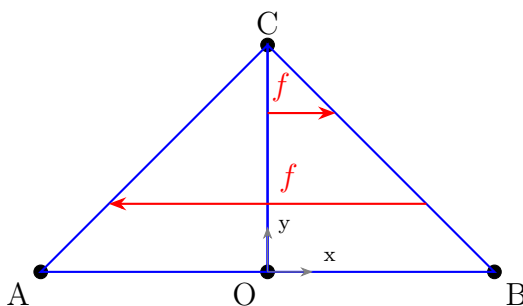
Solution: La mesure μ est alors l'unique mesure d'entropie maximale, donc $\mu = (h^{-1})_* \text{Leb}$. On a donc $(\psi \circ h^{-1})_* \text{Leb} = \text{Leb}$. Il s'en suit que $\psi \circ h^{-1}$ est une rotation et donc h , puis h^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$ comme ψ .

Exam
Duration : 3 hours

Allowed documents : Course notes, lecture notes, calculators, and dictionaries.

Exercise 3.

Let ABC be the full triangle in the plane $\mathbb{R}^2$ with $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, and $C = (0, 1)$. Let $O = (0, 0)$ be the origin. Consider the continuous piecewise affine map $f : ABC \rightarrow ABC$ such that f is affine on AOC and BCO with $f(A) = A$, $f(C) = C$, $f(O) = B$, and $f(B) = A$. Let $T_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be the tent map of slope 2, defined by $T_2(x) = 2x$ for $x \in [0, 1/2]$ and $T_2(x) = 2 - 2x$ for $x \in [1/2, 1]$. Recall that $h_{top}(T_2) = h(\text{Leb}_{[0,1]}) = \log 2$.



1. Show that for any ergodic invariant measure μ of (ABC, f) , there exists $\nu \in \mathcal{M}([0, 1], T_2)$ such that the probabilistic systems $(ABC, \mathcal{B}_{bor}, f, \mu)$ and $([0, 1], \mathcal{B}_{bor}, T_2, \nu)$ are isomorphic. Note that $f(\{y = a\} \cap ABC) = \{y = a\} \cap ABC$ for all $a \in \mathbb{R}$.

Solution: Since horizontal segments are invariant, any ergodic measure assigns total measure to one of these segments. The dynamics on these segments is conjugate to T_2 .

2. Calculate the topological entropy of (ABC, f) .

Solution: By the variational principle, $h_{top}(T_2) = \log 2$, and since the entropy of measures is preserved by isomorphism, we obtain $h_{top}(f) = \log 2$.

3. Show that there are infinitely many measures of maximal entropy.

Solution: If μ_k denotes the measure of maximal entropy of the restriction of f to the horizontal segment at height $1 - 1/k$ (which is just the Lebesgue measure on these intervals), we have $h(\mu_k) = \log 2 = h_{top}(f)$.

4. Find a convergent sequence $(\mu_k)_k$ of invariant Borel probability measures such that the limit μ satisfies $0 = h(\mu) < \limsup_k h(\mu_k) = h_{top}(f)$.

Solution: We have $\mu_k \xrightarrow{k} \delta_C$ and $h(\delta_C) = 0$.

Problème 2. Sofic Subshifts.

In the following, $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ denote finite alphabets.

1. Let $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ and $Y \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ be subshifts. Recall that $L_n(X)$ denotes the set of words of length n appearing in X . Moreover, we denote $L(X) = \bigcup_n L_n(X)$.
 - a. Let $\phi : Y \rightarrow X$ be a continuous map. Show that there exists an integer $r > 0$ and a map $\Phi : L_{2r+1}(Y) \rightarrow \mathcal{B}$ such that

$$\forall y = (y_k)_k \in Y, (\phi(y))_0 = \Phi(y_{-r} \cdots y_r)$$

Solution: By the uniform continuity of ϕ , there exists r such that $d(x, y) < 1/2^r$ implies $(\phi(x))_0 = (\phi(y))_0$ for the usual distance d on $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$. But for this distance, if $x_k = y_k$ for $k = -r, \dots, r$, then $d(x, y) < 1/2^r$. Thus, we can set $\Phi(y_{-r} \cdots y_r) = (\phi(y))_0$ for all $y = (y_k)_k \in Y$.

b. Additionally, suppose that $\phi \circ \sigma = \sigma \circ \phi$. Show that

$$\forall y = (y_k)_k \in Y \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\phi(y))_n = \Phi(y_{-r+n} \cdots y_{r+n})$$

Solution: Direct.

- Let $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ be a finite directed graph, given by a finite set of vertices $\mathcal{V}$ and a finite set of directed edges $\mathcal{E}$ (multiple loops are allowed : i.e., for two given vertices v and v' , there can be multiple edges from v to v'). For a directed edge $e \in \mathcal{E}$, we denote $i(e)$ (resp. $t(e)$) the vertex from which e departs (resp. where e arrives). For $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$, we denote $\mathcal{G}$ the **labelled graph** $(G, \mathcal{L})$: each edge e is marked by a letter $\mathcal{L}(e)$ of $\mathcal{A}$ called the label. We define the **complexity** $|\mathcal{G}|$ of $\mathcal{G}$ as the cardinality of $\mathcal{E}$. We consider the respective subsets X^G and $X^{\mathcal{G}}$ of $\mathcal{E}^{\mathbb{Z}}$ and $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ defined by

$$X^G = \{(e_k)_k \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}}, \forall k \ t(e_k) = i(e_{k+1})\}$$

$$X^{\mathcal{G}} = \{(a_k)_k \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \exists (e_k)_k \in X^G \text{ with } \forall k \ \mathcal{L}(e_k) = a_k\}$$

Verify that X^G and $X^{\mathcal{G}}$ are subshifts and that X^G is of finite type.

A subshift X is called **sofic** if there exists $\mathcal{G}$ with $X = X^{\mathcal{G}}$, and $\mathcal{G}$ is called a **presentation** of X .

- Show that X^G is sofic for any finite directed graph G .

Solution: If G is a finite directed graph, it suffices to consider the label $\mathcal{L}(e) = e$ for all $e \in \mathcal{E}$. Then $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ satisfies $X^{\mathcal{G}} = X^G$.

- Show that the sofic subshift $X^{\mathcal{G}}$, with $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$, is a factor of the finite type subshift X^G , i.e., there exists a continuous surjective map (semi-conjugacy) $\pi : X^G \rightarrow X^{\mathcal{G}}$ such that $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$.

Solution: We take as a factor the map $\pi : X^G \rightarrow X^{\mathcal{G}}$ defined by $\pi((e_n)_n) = (\mathcal{L}(e_n))_n$.

- A finite directed labelled graph $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$, with $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, is called **resolving** if for every $v \in \mathcal{V}$ and every $a \in \mathcal{A}$, there is at most one edge $e \in \mathcal{E}$ starting from v with $\mathcal{L}(e) = a$. Show that every sofic subshift X admits a resolving presentation.

Hint : Consider the finite directed graph $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ with $\mathcal{V}'$ equal to the set $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ of subsets of $\mathcal{V}$, and define an edge from I to J with $I, J \in \mathcal{P}(\mathcal{V})$ when there exists $a \in \mathcal{A}$ such that

$$J = \{j \in \mathcal{V}, \exists e \in \mathcal{E} \text{ with } i(e) \in I, t(e) = j \text{ and } \mathcal{L}(e) = a\}.$$

Solution: For the graph given in the hint, we take as a label $\mathcal{L}'(e)$ the letter a associated with the edge $e \in \mathcal{E}'$. The labelled graph $(G', \mathcal{L}')$ is resolving by construction. It is easily verified that $X^{\mathcal{G}'} = X^{\mathcal{G}}$.

- Let $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$, with $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, be a finite directed labelled resolving graph. Show that $X^{\mathcal{G}}$ is a factor of X^G via a semi-conjugacy $\pi : X^G \rightarrow X^{\mathcal{G}}$ satisfying

$$\forall x \in X^{\mathcal{G}}, \# \pi^{-1}\{x\} \leq \#\mathcal{V}.$$

Solution: In a resolving labelled graph, once the sequence of labels and the starting vertex are fixed, there is exactly one path in G whose labels represent the given sequence.

7. Let X be a sofic subshift. Let $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$, with $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, be a resolving presentation of X of minimal complexity, i.e., any resolving presentation $\mathcal{G}'$ of X satisfies $|\mathcal{G}'| \geq |\mathcal{G}|$.

- a. Show that for every $e \in \mathcal{E}$, there exists $w_e \in L(X)$ such that every word u of $X^{\mathcal{G}}$ with $\mathcal{L}(u) = w_e$ contains the letter e . You may reason by contradiction to contradict the minimality of $\mathcal{G}$.

Solution: We reason by contradiction. Suppose an edge $e \in \mathcal{E}$ does not satisfy the desired property. Then, if we remove this edge from the labelled graph $\mathcal{G}$, the resulting graph $\mathcal{G}'$ still satisfies $X = X^{\mathcal{G}'}$ and is resolving as a subgraph of a resolving graph. This contradicts the minimality of the complexity of $\mathcal{G}$ among the resolving presentations of X .

- b. Show that if $X^{\mathcal{G}}$ is topologically transitive, then X^G is also.

Solution: Let $e, e' \in \mathcal{V}$. Since $X^{\mathcal{G}}$ is transitive, there exists $w' \in L(X^{\mathcal{G}})$ such that $w_e w' w_{e'} \in L(X^{\mathcal{G}})$. There exist u, u', u'' with $uu'u'' \in L(X^{\mathcal{G}})$ and $\mathcal{L}(u) = w_e$, $\mathcal{L}(u') = w'$, and $\mathcal{L}(u'') = w_{e'}$. By definition of w_e and $w_{e'}$, the words u and u'' contain the letters e and e' , respectively. Thus, e and e' can be connected in X^G . This being true for all e, e' , the subshift X^G is also transitive.

8. Explain why a topologically transitive sofic subshift has a unique measure of maximal entropy.

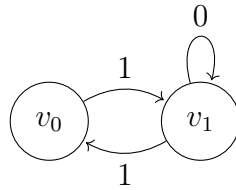
Solution: Consider a minimal resolving presentation $\mathcal{G}$ of X . From the previous questions, the transitive finite type subshift X^G is a finite fiber extension of $X^{\mathcal{G}}$. By the course, X^G has a unique measure of maximal entropy, and the entropy of measures is preserved by a finite fiber extension. It follows that $X^{\mathcal{G}}$ also has a unique measure of maximal entropy.

9. Let G be a finite directed graph. Using question 1, show that if a subshift (X, σ) of $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ is a factor of X^G , then (X, σ) is sofic.

Hint : If $\Phi : L_{2r+1}(X^G) \rightarrow \mathcal{A}$ is the map associated with the factor given in question 1, you may look for a presentation $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ of X , with $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, satisfying $\mathcal{V} = L_{2r+1}(X^G)$ and $\mathcal{L} = \Phi$.

Solution: We take $\mathcal{V} = L_{2r+1}(X^G)$ and set a unique edge $e_{v,v'} \in \mathcal{E}$ from v to v' if $[v] \cap \sigma^{-1}[v'] \neq \emptyset$. Finally, we consider the label $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ defined by $\mathcal{L}(e_{v,v'}) = \Phi(v)$. It is easily verified that $X^{\mathcal{G}} = X$.

10. Consider the following labelled directed graph $\mathcal{G}$ ($\mathcal{V} = \{v_0, v_1\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}, \dots$) :



Show that the sofic subshift $X^{\mathcal{G}} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ associated is not of finite type. Calculate the topological entropy of $X^{\mathcal{G}}$.

Solution: $X^{\mathcal{G}}$ is not of finite type because all words $01^{2k+1}0$ for $k \in \mathbb{N}$ are forbidden. Moreover, $X^{\mathcal{G}}$ is a finite fiber extension of X^G and $h_{top}(X^G) = h_{top}(X^{\mathcal{G}}) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Exercise 4.

Recall that any continuous map of the circle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admits a lift $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, i.e., $\forall x \in \mathbb{R}, f(\bar{x}) = \overline{F(x)}$, where $\mathbb{T}^1 \ni \bar{x} = x \pmod{1}$. The integer $F(x+1) - F(x)$ does not depend on the choice of F and is called the degree of f .

Consider a $\mathcal{C}^2$ map f of the circle $\mathbb{T}^1$. In this case, any lift F is also $\mathcal{C}^2$ and we denote $f'(\bar{x}) = F'(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$. We assume

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{T}^1, f'(\bar{x}) \geq \lambda > 1.$$

1. Show that the degree d of f is greater than or equal to 2.

Solution: $d = F(1) - F(0) = \int_0^1 f'(t)dt \geq \lambda > 1$

2. Let $\mathcal{H}$ be the set of continuous increasing maps H from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ satisfying $H(t+1) = H(t) + 1$. We equip $\mathcal{H}$ with the distance $D(H, G) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |H(t) - G(t)|$. Using the Picard fixed point theorem, show that there exists $H \in \mathcal{H}$ such that $d \times H = H \circ F$.

Solution: $(\mathcal{H}, d)$ is a complete metric space. By the fixed point theorem, it suffices to note that $\mathcal{H} \ni H \mapsto \frac{1}{d}H \circ F$ is $1/d$ -contracting for the distance D .

3. Show that H is a homeomorphism of $\mathbb{R}$.
Note that $H^{-1}(\{x\})$ is an interval for all $x \in \mathbb{R}$.

Solution: If $I_x = H^{-1}(\{x\})$ is not reduced to a point, $|F(I_x)|$ is greater than $\lambda|I_x|$ but $H \circ F(I_x) = dH(I_x) = dx$, i.e., $F(I_x) \subset I_{dx}$. Thus, $\sup_x |I_x| = +\infty$, which contradicts $H(t+1) = H(t) + 1$ for all t .

4. Deduce that $h_{\text{top}}(f) = \log d$ and then that f has a unique measure of maximal entropy. You may start by recalling the case where f is the map $f_d : \bar{x} \mapsto d \times \bar{x}$.

Solution: The map H descends to the circle as a homeomorphism h that satisfies $h \circ f = f_d \circ h$. In other words, f and f_d are conjugate. But we have seen that f_d has topological entropy $\log d$ with Leb as the unique measure of maximal entropy. The same is therefore true for f by invariance of entropy under conjugation.

5. We admit that f has an ergodic invariant probability measure that is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure $\mu = \rho d\text{Leb}$ with ρ a $\mathcal{C}^1$ function satisfying $0 < \inf_x \rho(x) \leq \sup_x \rho(x) < +\infty$.
Verify that $\psi_*\mu = \text{Leb}$ with $\psi(x) = \int_0^x \rho(t) dt$.

Solution: The map ψ is a $\mathcal{C}^2$ diffeomorphism. It suffices to observe that for all x , we have

$$(\psi^{-1})_*\text{Leb}([0, x]) = \text{Leb}(\psi([0, x])) = \psi(x) = \mu([0, x]).$$

6. Suppose that $h(\mu) = h_{\text{top}}(f)$. Show that H is a $\mathcal{C}^2$ diffeomorphism.

Solution: The measure μ is then the unique measure of maximal entropy, so $\mu = h_*\text{Leb}$. We thus have $(\psi \circ h)_*\text{Leb} = \text{Leb}$. It follows that $\psi \circ h$ is a rotation and thus h is $\mathcal{C}^2$ like ψ .