DEVOIR MAISON MAT551 - 2022
A RENDRE POUR LE 25 NOVEMBRE

Le but de ce problème est d'étudier les mesures de probabilité invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue pour les applications dilatantes par morceaux de l'intervalle.

On rappelle quelques résultats et notations classiques de théorie de la mesure. Soient X un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{B}$ et μ une mesure positive sur $\mathcal{B}$. On considère la relation d'équivalence $\sim$ suivante sur les fonctions mesurables réelles sur $(X, \mathcal{B})$:

$$f \sim g \text{ si et seulement si } \mu\text{-presque partout } f = g.$$

Pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ on notera $\dot{f}$ la classe d'équivalence de f. Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$) on considère $\mathcal{L}^p(\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables avec $\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} < +\infty$ (resp. $\|f\|_\infty := \inf_{E,\ \mu(E)=1} \sup_{x \in E} |f(x)|$) et l'ensemble quotient associé $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$. On rappelle que $\|\cdot\|_p$ induit une norme sur $L^p(\mu)$.

On rappelle qu'une mesure signée sur $\mathcal{B}$ est la différence de deux mesures positive, dont au moins une est finie. Soient μ une mesure positive et ν une mesure signée sur $\mathcal{B}$, on dit que ν est absolument continue par rapport à μ si tout $A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) = 0$ vérifie aussi $\nu(A) = 0$. Une application mesurable $T : X \to X$ est dite absolument continue par rapport à μ si pour tout borélien A avec $\mu(A) = 0$ on a aussi $\mu(T^{-1}A) = 0$.

Théorème 0.1. *(Radon-Nykodym) Soient μ une mesure positive finie et ν une mesure signée finie sur $\mathcal{B}$ telles que ν est absolument continue par rapport à μ. Alors il existe une unique fonction $f \in L^1(\mu)$, appelée la dérivée de Radon-Nykodyn de ν relativement à μ, telle que ν soit la mesure à densité f par rapport à μ (notée $f d\mu$).*

Lorsque X est un intervalle de $\mathbb{R}$ on considère la tribu des boréliens $\mathcal{B}$ sur X. On notera alors $\mathcal{L}^p(X)$ et $L^p(X)$ pour $\mathcal{L}^p(m)$ et $L^p(m)$ avec m la mesure de Lebesgue sur X. On rappelle le critère de compacité suivant :

Théorème 0.2. *(Kolmogorov-Riesz) Soit $\mathcal{F}$ un sous ensemble de $L^1(\mathbb{R})$ tel que*
- *$\mathcal{F}$ est borné dans $L^1(\mathbb{R})$;*
- *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$,*
$$\int_{|t|>R} |f(t)| dt < \epsilon;$$
- *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour tout $|s| < h$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$,*
$$\int_{\mathbb{R}} |f(t+s) - f(t)| dt < \epsilon,$$

alors $\mathcal{F}$ est d'adhérence compact dans $L^1(\mathbb{R})$.

Partie I : Fonctions à Variations bornées

Soit I un intervalle réel. A toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ on associe la fonction $V(f) : I \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in I$ par

$$Vf(x) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \ :\ N \in \mathbb{N}^*,\ x_0 < x_1 < \ldots x_{N-1} < x_N \leqslant x,\ x_0 \in I \right\}.$$

Le supremum $\sup_{x\in I} Vf(x)$ *de la fonction* Vf*, que l'on notera* $V(f)$*, est appelé la variation totale de* f*. Lorsque* $V(f)$ *est fini, on dit que* f *est à variations bornées. On considère dans la suite l'ensemble* $\mathcal{BV}(I)$ *des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *à variations bornées.*

I.1.a. Soit $f \in \mathcal{BV}(I)$. Montrer que les fonctions Vf et $Vf - f$ sont des fonctions croissantes.

I.1.b. Montrer l'inclusion $\mathcal{BV}(I) \subset \mathcal{L}^\infty(I)$.

I.1.c. Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $f, g \in \mathcal{BV}(I)$, on a :

$$V(\alpha f + g) \leqslant |\alpha| V(f) + V(g).$$

On considère dans la suite l'ensemble $BV(I) \subset L^1(I)$ *des classes de fonctions mesurables admettant un représentant dans* $\mathcal{BV}(I) \cap \mathcal{L}^1(I)$*, autrement dit,* $f \in L^1(I)$ *appartient à* $BV(I)$ *si et seulement s'il existe* $g \in \mathcal{BV}(I)$ *tel que* $\dot{g} = f$*. De plus on note alors* $V(f) := \inf\{V(g),\ \dot{g} = f\}$ *et* $\|f\|_{BV} := \|f\|_1 + V(f)$*.*

1.2.a. Montrer que $BV(I)$ muni de $\|\cdot\|_{BV}$ est un espace vectoriel normé.

1.2.b. Vérifier que pour tout $f \in BV(I)$ on a

$$V(f) = \inf\{V(g),\ \dot{g} = f \text{ et } \sup_{x\in I} |g(x)| = \|f\|_\infty\}.$$

I.2.c. En déduire que $\|f\|_\infty \leqslant V(f) + \frac{\|f\|_1}{|I|}$, où $|I| \in \mathbb{R}^{+*} \cup +\infty$ est la longueur de l'intervalle I.

Soit H *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant* I*. Pour tout* $f \in L^1(I)$*, on note* $f_H : H \to \mathbb{R}$ *l'extension de* f *définie pour tout* $x \in H$ *par* $f_H(x) = f(x)$ *si* $x \in I$ *et* $f_H(x) = 0$ *sinon.*

1.3.a. Montrer que

$$V(f_H) \leqslant V(f) + 2\|f\|_\infty.$$

I.3.b. Montrer que pour tout $h > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{\mathbb{R}}(x+h) - f_{\mathbb{R}}(x)|dx := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^h |f_{\mathbb{R}}(x+(k+1)h) - f_{\mathbb{R}}(x+kh)|dx.$$

I.3.c. En déduire l'inégalité suivante pour tout $f \in BV(I)$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{\mathbb{R}}(x+h) - f_{\mathbb{R}}(x)|dx \leqslant hV(f_{\mathbb{R}}).$$

I.3.d. Conclure que, lorsque I est un intervalle borné, toute partie bornée de $(BV(I), \|\cdot\|_{BV})$ est d'adhérence compacte dans $L^1(I)$.

I.4.a. Soient $F, G \in \mathcal{BV}(I)$. Pour tout $(x, y, z) \in I^3$ avec $x \leqslant z \leqslant y$, montrer que

$$|(FG)(x) - (FG)(y)| \leqslant (VF(y) - VF(x))\,\|G\|_\infty + |F(z)||G(x) - G(y)|.$$

I.4.b. En déduire que pour tout $f, g \in BV(I)$,

$$V(fg) \leqslant V(f)\|g\|_\infty + \|f\|_\infty V(g).$$

I.4.c. On note $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, qui s'étendent en des fonctions de classe C^1 sur un voisinage de $\overline{I}$, l'adhérence de I. En utilisant toujours I.4.a, montrez que si $f \in BV(I)$ et $g \in C^1(I)$, alors

$$V(fg) \leqslant V(f)\|g\|_\infty + \|f\|_1 \|g'\|_\infty.$$

1.6. Montrer que les fonctions continues sur un intervalle compact $I = [a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b[$ sont à variations bornées et que pour une telle fonction f on a

$$V(f) := \int_{[a,b]} |f'(t)| dt.$$

Partie II : Opérateur de transfert

Soient X un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{B}$ et μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}$. On considère dans cette partie une application mesurable $T : X \to X$ absolument continue par rapport à m.

II.1. Soit $f \in L^1(m)$. Vérifiez que la mesure signée finie $T^*(fdm)$, définie par $T^*(fdm)(A) = \int_{T^{-1}A} fdm$ pour tout borélien A, est absolument continue par rapport à m.

On notera $P_T f$ la dérivée de Radon-Nykodym associée à $T^*(fdm)$ relativement à m.

II.2. Montrer que $P_T f$ est l'unique élément de $L^1(m)$ telle que pour tout $g \in L^\infty(m)$,

$$\int_X P_T f \cdot g \; dm = \int_X f \cdot (g \circ T) \; dm.$$

L'opérateur $P_T : L^1(m) \to L^1(m)$ est appelé l'opérateur de transfert associé à (T, m).

II.3.a. Montrer que P_T est linéaire.

II.3.b. Soit $f \in L^1(m)$ avec $f \geqslant 0$. Montrer que $P_T f \geqslant 0$ puis que $\|P_T f\|_1 = \|f\|_1$.

II.3.c. En déduire que P_T est continue et calculer sa norme d'opérateur $|||P_T|||$ definie par $|||P_T||| := \sup_{\|f\|_1 = 1} \|P_T f\|_1$.

On dit qu'une mesure de probabilité borélienne μ est T-invariante, lorsque pour tout borélien A on a $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$.

II.4.a. Montrer que si fdm est une mesure de probabilité T-invariante alors f est un point fixe de l'opérateur de transfert P_T.

II.4.b. Réciproquement montrer que si $f \geqslant 0$ et $f \not\equiv 0$ est un point fixe de P_T, alors $\frac{fdm}{\int_X fdm}$ est une mesure de probabilité T-invariante.

Partie III : Inégalité de Lasota-Yorke pour des applications dilatantes par morceaux

Dans toute cette partie on considère une application $T : [0, 1] \to [0, 1]$ dilatante et C^2 par morceaux, i.e. il existe $0 = x_0 < x_1 < ... < x_d = 1$ et $\lambda > 1$ tels que pour tout $i = 1, ..., d$

la fonction $T_i := T|_{]x_{i-1},x_i[}$ *se prolonge par une fonction* C^2 *sur un voisinage de* $[x_{i-1}, x_i]$ *avec* $\inf_{]x_{i-1},x_i[} |T'(x)| > \lambda$.

On notera $T_i^{-1} : T(]x_{i-1}, x_i[) \to]x_{i-1}, x_i[$ *la fonction réciproque de* T_i. *On rappelle que pour* $f \in L^1(I)$ *et* $I \subset H$ *la fonction* f_H *est l'extension de* f *à* H *par* 0 *définit après 1.2.c.*

III.1. Montrer que pour tout $f \in L^1([0,1])$, on a

$$P_T f = \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{f \circ T_i^{-1}}{T_i' \circ T_i^{-1}} \right)_{[0,1]}.$$

III.2.a. Montrer que pour tout $i = 1, ..., d$, il existe une constante $C_i > 0$, telle que

$$V\left(\frac{f \circ T_i^{-1}}{T_i' \circ T_i^{-1}} \right) \leqslant \frac{Vf(x_i) - Vf(x_{i-1})}{\lambda} + C_i \int_{[x_{i-1},x_i]} |f(t)|dt.$$

En déduire que $P_T(BV([0,1])) \subset BV([0,1])$.

III.2.b. Conclure qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|P_T f\|_{BV} \leqslant \frac{3}{\lambda} \|f\|_{BV} + C\|f\|_1.$$

III.3.a. On suppose tout d'abord $\lambda > 3$. On note $\mathbf{1}$ la fonction indicatrice de $[0,1]$. Montrer que pour tout entier n

$$\|P_T^n \mathbf{1}\|_{BV} \leqslant \left(\frac{3}{\lambda}\right)^n + \frac{C\lambda}{\lambda - 3}.$$

III.3.b. Montrer que tout point d'accumulation dans $L^1([0,1])$ de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_T^k \mathbf{1}\right)_n$ est un point fixe de P_T.

III.3.c. Montrer qu'un tel point d'accumulation appartient à $L^\infty([0,1])$.

III.3.d. Conclure qu'il existe une mesure de probabilité T-invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m, dont la densité appartient à $L^\infty([0,1])$.

III.4. Etablir l'existence d'une telle mesure dans le cas général $\lambda > 1$ (on pourra considérer une itérée T^n avec n assez grand).

Partie IV : un exemple

Dans cette partie, on considère l'application $T_a : [0,1] \to [0,1]$ *pour* $a \in]0,1[$ *fixé définie par*

$$\begin{aligned} T_a(x) &= \tfrac{x}{a} \text{ pour } x \in [0,a[, \\ &= \tfrac{x-a}{1-a} \text{ pour } x \in [a,1]. \end{aligned}$$

IV. 1. Montrer que la mesure de Lebesgue m sur $[0,1]$ est une mesure de probabilité T_a-invariante.

IV.2. Montrer que pour tout $f \in L^1([0,1])$ on a pour Lebesgue-presque tout $x \in [0,1]$

$$P_{T_a} f(x) = af(ax) + (1-a)f((1-a)x + a).$$

IV.3. Etablir pour tout $f \in BV([0,1])$ l'inégalité suivante :

$$\|f - \int f dm\|_1 \leqslant V(f).$$

IV.4. Montrer que pour tout $f \in BV([0,1])$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a avec $\alpha = \max(a, 1-a)$

$$V\left(P_{T_a}^n f\right) \leqslant \alpha^n V(f),$$

puis

$$\|P_{T_a}^n f - \mathbf{1}\int f dm\|_1 \leqslant \alpha^n V(f).$$

IV.4. En déduire que m est l'unique mesure de probabilité T_a-invariante absolument continue par rapport à m.

IV.5. Montrer que m est mélangeante, i.e. pour tout $f, g \in L^2([0,1])$,

$$\left|\int_X f g \circ T_a^n dm - \int_X f dm \int_X g dm\right| \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$