

**DEVOIR MAISON À RENDRE**  
**AVANT LE 3 NOVEMBRE**

Soit  $\phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et soit  $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$  la rotation d'angle  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . On considère le produit semi-direct  $f_\phi$  sur le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  défini comme suit :<sup>1</sup>

$$\forall (x, y) \in \mathbb{T}^2, \quad f_\phi(x, y) = (R_\alpha(x), y + \phi(x)).$$

On note respectivement  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les mesures de Haar sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (la mesure  $\lambda_1$  est la mesure de Lebesgue induite sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et  $\lambda_2$  est donné par le produit  $\lambda_1 \times \lambda_1$ ).

**PARTIE I : COBORDS MESURABLES ET UNIQUE ERGODICITÉ.**

- (1) Vérifier que la mesure  $\lambda_2$  est  $f_\phi$ -invariante. On a vu en cours que  $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$  était uniquement ergodique si  $\lambda_2$  est ergodique. Montrer que  $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$  est aussi minimal dans ce cas.
- (2) Dans la suite de cette partie on suppose que  $\phi$  est un cobord mesurable, i.e. il existe une fonction mesurable  $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\phi(x) = \psi \circ R_\alpha(x) - \psi(x)$  pour Lebesgue presque tout  $x$ . Montrer que les systèmes probabilistes  $(\mathbb{T}^2, f_\phi, \lambda_2)$  et  $(\mathbb{T}^2, R_\alpha \times Id_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}, \lambda_2)$  sont isomorphes.
- (3) Vérifiez que  $(\mathbb{T}^2, R_\alpha \times Id_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}, \lambda_2)$  n'est pas ergodique et en déduire que le système topologique  $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$  n'est pas uniquement ergodique.

**PARTIE II : COBORDS CONTINUS ET MINIMALITÉ.**

- (1) On suppose que  $\phi$  est un cobord continu, i.e. il existe une fonction continue  $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant  $\phi = \psi \circ R_\alpha - \psi$ . En s'inspirant de la première partie, montrer que le système topologique  $(\mathbb{T}^2, f_\phi)$  n'est pas minimal.
- (2) On s'intéresse dans la suite de cette partie à la réciproque de la question (1) sous l'hypothèse  $\int \phi d\lambda_1 = 0$ . On suppose donc que  $\int \phi d\lambda_1 = 0$  et que  $(X, f_\phi)$  n'est pas minimal. On considère un compact propre non vide  $K$  de  $\mathbb{T}^2$  satisfaisant  $f_\phi(K) = K$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  on pose

$$K_x := \{y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, (x, y) \in K\}.$$

- a) Montrer que  $K_x \neq \emptyset$  pour tout  $x$ .
- b) Montrer que pour tout  $x, x' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  il existe  $\alpha_{x,x'} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  tel que  $K_x + \alpha_{x,x'} \subset K_{x'}$ . En déduire que  $K_x \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  pour tout  $x$ .
- c) Puis montrer que  $K_x + \alpha_{x,x'} = K_{x'}$  (on pourra vérifier que si  $K_x + \beta \subset K_{x'}$  pour un certain  $\beta$  alors on a en fait  $K_x + \beta = K_{x'}$ ).
- (3) Montrer qu'il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\psi : x' \mapsto \alpha_{0,x'}$  définisse une application continue de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ .
- (4) Vérifier que  $\psi(x + \alpha) - \psi(x) = \phi(x)$  pour tout  $x$  (où l'on considère ici  $\phi(x)$  dans  $\mathbb{R}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ ).

---

1. Par abus de notation on ne fera pas de distinction entre un nombre réel et sa classe d'équivalence dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ .

- (5) Soit un relèvement continu de  $\psi$  noté encore  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Vérifier qu'il existe des entiers  $k$  et  $l$  tels que
- la fonction  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie pour tout  $x$  par  $\theta(x) = \psi(x) - \frac{k}{q}x$ , est 1-périodique,
  - $\theta \circ R_\alpha - \theta + \frac{k\alpha}{q} = \psi \circ R_\alpha - \psi = \phi + \frac{l}{q}$ .
- (6) Montrer que  $k = l = 0$  puis conclure que  $\phi$  est un cobord continu.

### PARTIE III : ANALYSE DE FOURIER ET PETITS DIVISEURS

On rappelle tout d'abord deux résultats d'analyse de Fourier :

- i) Soit  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi n x}$  une série de Fourier avec  $\limsup_{|n| \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_n|}{n} < 0$ . Alors cette série définit une fonction analytique 1-périodique.
- ii) La série de Fourier  $\mathcal{S}_n \phi$  d'une fonction continue 1-périodique est Césaro sommable, i.e.  $\left( \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k \leq n} \mathcal{S}_k \phi \right)_n$  converge (uniformément vers  $\phi$ ).
- (1) Soient  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$  et  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles avec  $s_j > t_j > 0$  pour tout  $j$  et  $\lim_j s_j = 0$ .

- a) On suppose qu'il existe des entiers  $0 < n_0 < n_1 < \dots < n_j$  et des intervalles compacts d'intérieur non vide  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \supset K_1 \supset K_2 \dots \supset K_j$  tel que pour tout  $0 \leq l \leq j$  et  $x \in K_l$

$$t_{n_l} \leq |1 - e^{ixn_l}| \leq s_{n_l}.$$

Montrer qu'il existe un entier  $n_{j+1}$  arbitrairement grand et un intervalle compact d'intérieur non vide  $K_{j+1} \subset K_j$  tel que pour tout  $x \in K_{j+1}$

$$t_{n_{j+1}} \leq |1 - e^{ixn_{j+1}}| \leq s_{n_{j+1}}.$$

On pourra choisir  $n_{j+1}$  assez grand de sorte que  $n_{j+1}K_j = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

- b) En déduire qu'il existe un irrationnel  $\alpha$  et une suite  $(n_j)_j$  d'entiers positifs non nuls croissant arbitrairement vite tels que

$$t_{n_j} \leq |1 - e^{2i\pi\alpha n_j}| \leq s_{n_j}.$$

- (2) On pose  $s_j = e^{-j} = 2t_j$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . On considère la fonction 1-périodique  $\phi$  dont les coefficients de Fourier  $c_n(\phi) = \int_0^1 \phi(t) e^{-2i\pi n t} dt$  vérifient  $c_n(\phi) = 0$  pour  $|n| \notin \{n_j, j \in \mathbb{N}\}$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}$

$$c_{n_j}(\phi) = \overline{c_{-n_j}(\phi)} = \frac{e^{-n_j}}{j} \frac{1 - e^{2i\pi n_j \alpha}}{|1 - e^{2i\pi n_j \alpha}|}.$$

- a) Montrer que  $\phi$  est une fonction réelle analytique d'intégrale nulle (sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  pour  $\lambda_1$ ),
- b) Montrer que  $\phi$  est un cobord<sup>2</sup>  $L^2$ , mais pas un cobord continu.

### CONCLUSION

*Construire un difféomorphisme analytique du tore  $\mathbb{T}^2$  minimal mais pas uniquement ergodique.*

---

2. i.e. il existe une fonction  $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $L^2$  tel que  $\phi(x) = \psi \circ R_\alpha(x) - \psi(x)$  pour  $\lambda_1$ -presque tout  $x$ .