DEVOIR MAISON MAT551 - 2018
A RENDRE POUR LE 9 NOVEMBRE
LE THÉORÈME D'OSSELEDETS EN DIMENSION 2

La qualité de la rédaction sera un facteur important de l'appréciation des copies. On pourra utiliser librement les résultats de la Partie I (même si vous n'avez pas réussi à les démontrer) pour traiter la Partie II.

1 Fibre d'une mesure pour une extension topologique

Soit $\pi : (Y, g) \to (X, f)$ une extension entre deux systèmes topologiques (X, f) et (Y, g), i.e. $\pi : Y \to X$ est une application continue surjective satisfaisant $\pi \circ g = f \circ \pi$. On fixe $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$ ergodique.

(1) Montrer que l'ensemble $\{\nu \in \mathcal{M}(Y, g),\ \pi^*\nu = \mu\}$ est convexe et compact pour la topologie faible $*$.

(2) Montrer que pour μ-presque tout point $x \in X$ et tout point $y \in Y$ avec $\pi(y) = x$, toute limite ν de $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} \delta_{g^k y}\right)_n$ dans $\mathcal{M}(Y)$ vérifie $\pi^*\nu = \mu$.

(3) Vérifier que si $\nu \in \mathcal{M}(Y, g)$ avec $\pi^*\nu = \mu$ s'écrit sous la forme $\nu = \lambda\eta + (1-\lambda)\xi$ pour $\lambda \in]0, 1[$ et $\eta, \xi \in \mathcal{M}(Y, g)$ alors on a $\pi^*\eta = \pi^*\xi = \mu$. En déduire que les points extrémaux de $\{\nu \in \mathcal{M}(Y, g),\ \pi^*\nu = \mu\}$ sont des mesures ergodiques, et qu'en particulier il existe $\nu \in \mathcal{M}(Y, g)$ ergodique avec $\pi^*\nu = \mu$.

On considère dans la suite de cette partie une fonction continue $\phi : Y \to \mathbb{R}$ et on note $\lambda := \inf_{\substack{\xi\in\mathcal{M}(Y,g)\\ \pi^*\xi=\mu}} \int \phi\, d\xi$.

(4) Montrer qu'il existe une mesure $\nu \in \mathcal{M}(Y, g)$ ergodique avec $\pi^*\nu = \mu$ telle que

$$\int \phi\, d\nu = \lambda.$$

Indications : On pourra raisonner comme précédemment en considérant le compact convexe non vide $\left\{\nu \in \mathcal{M}(Y, g),\ \pi^*\nu = \mu \text{ et } \int \phi\, d\nu = \lambda\right\}$.

(5) Montrer que pour μ-presque tout $x \in X$ et tout point $y \in Y$ avec $\pi(y) = x$ on a :

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leq k<n} \phi \circ g^k(y) \geq \lambda.$$

Indications : On pourra raisonner par l'absurde en considérant $y \in Y$ avec $\pi(y) = x$ et $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} \phi\circ g^k(y) < \lambda$ puis vérifier que $\int \phi\, d\nu < \lambda$ pour une limite ν de $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} \delta_{g^k y}\right)_n$ dans $\mathcal{M}(Y)$.

2 Théorème d'Osseledets

On considère un système topologique inversible (X, f) et une application continue de X dans l'ensemble $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$ des applications linéaires inversibles de $\mathbb{R}^2$. Une telle paire $\mathcal{A} = (f, A)$ est appeléun cocycle continu. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. La sphère unité de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|$ est notée $\mathbb{S}$. Un cocycle continu $\mathcal{A} = (f, A)$ induit naturellement un système dynamique inversible $F_\mathcal{A}$ sur $X \times \mathbb{S}$ en posant $F_\mathcal{A}(x, v) = \left(f(x), \frac{A(x)v}{\|A(x)v\|}\right)$ pour tout $(x, v) \in X \times \mathbb{S}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on note A^n le cocycle continu de X défini pour tout $x \in X$ comme suit :

$$A^n(x) = A(f^{n-1}x)A(f^{n-2}x)\cdots A(x) \text{ pour } n > 0$$

et

$$A^n(x) = \left(A(f^{-1}x)A(f^{-2}x)\cdots A(f^n x)\right)^{-1} \text{ pour } n < 0.$$

Nous proposons de montrer le théorème suivant dû à Osseledets :

Théorème.
Avec les notations et les hypothèses précédentes, pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,f)$ ergodique il existe des réels $\lambda_1 \geq \lambda_2$ tels que pour μ-presque tout $x \in X$ on ait des vecteurs linéairement indépendants $v_1(x), v_2(x)$ de $\mathbb{R}^2$ dépendant de façon borélienne de x satisfaisant pour $i = 1, 2$:

$$\frac{1}{n} \log \|A^n(x) v_i(x)\| \xrightarrow{|n| \to +\infty} \lambda_i.$$

Les réels λ_1 et λ_2 sont appelés les exposants de Lyapunov de μ pour (f, A).

On fixe désormais $\mu \in \mathcal{M}(X,f)$ ergodique. On considère sur $X \times \mathbb{S}$ la fonction réelle $\phi_{\mathcal{A}} : (x,v) \mapsto \log \|A(x)v\|$ et on note $\pi : X \times \mathbb{S} \to X$ la projection sur la première coordonnée. Enfin pour $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on note

$$F^\lambda(x) = \{v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \xrightarrow{|n| \to +\infty} \lambda\}.$$

2.1 Le plus petit exposant et l'espace associé

(1) Vérifiez que $A(x)F^\lambda(x) = F^\lambda(f(x))$ pour tout $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On pose $\lambda_2 = \inf_{\substack{\nu \in \mathcal{M}(X \times \mathbb{S}, F_A) \\ \pi^* \nu = \mu}} \int \phi \, d\nu$.

(2) Montrer qu'il existe une mesure ν ergodique F_A-invariante telle que

$$\int \phi \, d\nu = \lambda_2.$$

(3) En déduire que $F^{\lambda_2}(x) \neq \emptyset$ pour μ-presque tout $x \in X$. On prendra soin de distinguer *les cas $n \to +\infty$ et $n \to -\infty$. Indications :* Appliquer le théorème ergodique aux systèmes probabilistes $(X \times \mathbb{S}, F_A, \nu)$ et $(X \times \mathbb{S}, F_A^{-1}, \nu)$ avec ϕ pour fonction test.

(4) Montrer que pour μ-presque tout $x \in X$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$$\liminf_{|n| \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \geq \lambda_2.$$

2.2 Fin de la preuve du théorème d'Osseledets

(1) On pose $\lambda_1 := \sup_{\substack{\nu \in \mathcal{M}(X \times \mathbb{S}, F_A) \\ \pi^* \nu = \mu}} \int \phi \, d\nu \geq \lambda_2$. Montrez que μ-presque tout $x \in X$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$$\limsup_{|n| \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \leq \lambda_1.$$

(2) On suppose $\lambda_1 = \lambda_2$. Montrer que $F^{\lambda_2}(x) = \mathbb{R}^2$ pour μ-presque tout x. Conclure le théorème d'Osseledets dans ce cas et montrer que les exposants de Lyapunov sont alors tous les deux égaux à λ_2.

(3) On se place dans l'autre cas : $\lambda_1 > \lambda_2$. Montrer que $F^{\lambda_1}(x) \neq \emptyset$ pour μ-presque tout $x \in X$.

(4) Conclure la preuve du théorème d'Osseledets.

2.3 La somme des exposants

(1) Soit $A \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$ montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$|\mathsf{det}(u,v)\mathsf{det}(A)| = |\mathsf{det}(Au, Av)| \leq \|Au\| \times \|Av\|.$$

(2) En déduire que les exposants de Lyapunov λ_1, λ_2 de μ pour (f, A) vérifient

$$\int \log |\mathsf{det}(A(x))| \, d\mu(x) \leq \lambda_1 + \lambda_2.$$

(3) Montrer que si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ sont les exposants de Lyapunov de μ pour (f, A) alors $-\lambda_2 \geq -\lambda_1$ sont les exposants de Lyapunov de μ pour $(f^{-1}, A^{-1}(f^{-1}\cdot))$.

(4) Conclure que $\lambda_1 + \lambda_2 = \int \log |\mathsf{det}(A(x))| \, d\mu(x)$.

(5) Soit f un difféomorphisme du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ préservant la mesure de Lebesgue. Montrer que la somme des exposants de Lyapunov de toute mesure ergodique f-invariante est nulle pour le *cocycle dérivé* A donné par la différentielle $d_x f$ de f sur le plan tangent du tore (qui s'identifie naturellement à $\mathbb{R}^2$), i.e. $A(x)v = d_x f(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.