DEVOIR MAISON MAT551 - 2019
A RENDRE POUR LE 15 NOVEMBRE

On munit $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la métrique $\mathsf{d}(u,v) = 2^{-\min(k\in\mathbb{N},\ u_k\neq v_k)}$ pour tout $u = (u_k)_k$, $v = (v_k)_k \in X$. On considère alors le décalage unilatéral σ sur X défini par $\sigma u = (u_{k+1})_k$ pour tout $u = (u_k)_k \in X$. On note $\mathcal{M}(X,\sigma)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes de X qui sont σ-invariantes. Pour une fonction continue $\phi : X \to \mathbb{R}$, une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X,\sigma)$ est dite ϕ-maximisante lorsque

$$\int \phi\, d\mu = -\alpha(\phi) := \sup_{\nu\in\mathcal{M}(X,\sigma)} \int \phi\, d\nu.$$

L'ensemble des mesures ϕ-maximisantes sera noté $Max(\phi)$.

(0) Montrez que $Max(\phi)$ est un compact convexe non vide de $\mathcal{M}(X,\sigma)$.

On note $(Lip, \|\|)$ l'espace vectoriel normé des fonctions $\phi : X \to \mathbb{R}$ Lipschitziennes avec $L(\phi) := \sup_{x\neq y} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|}$ et $\|\phi\| := \max\left(\sup_{x\in X} |\phi(x)|, L(\phi)\right)$. On rappelle qu'une orbite $\mathcal{O}$ est dite périodique si $\mathcal{O} = \left\{\sigma^k x,\ k \in \mathbb{N}\right\}$ avec x périodique, i.e. $\sigma^T x = x$ pour un entier $T > 0$. La mesure *périodique* $\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} \delta_{\sigma^k x}$ est alors l'unique mesure de $\mathcal{M}(X,\sigma)$ supportée par $\mathcal{O}$. Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème.
Pour tout ϕ dans un ouvert dense de Lip il existe une unique mesure ϕ-maximisante et celle-ci est supportée par une orbite périodique.

1 Caractère Robuste

Dans cette partie on considère une fonction $\phi \in Lip$ telle qu'il existe une mesure maximisante $\mu_{\mathcal{O}}$ supportée par une orbite périodique $\mathcal{O}$ de periode $T_{\mathcal{O}}$. Pour $K \subset X$ on notera $\mathsf{d}_K : X \to \mathbb{R}$ la fonction distance à K, i.e. $\mathsf{d}_K = \mathsf{d}(\cdot, K)$.

(1) Pour $\epsilon > 0$ on note $\phi_\epsilon = \phi - \epsilon \mathsf{d}_{\mathcal{O}}$. Montrer que $\mu_{\mathcal{O}}$ est l'unique mesure ϕ_ϵ-maximisante pour tout $\epsilon > 0$.

(2) Soit $\epsilon > 0$ fixé et $\psi \in Lip$ avec $L(\psi - \phi) \leq \epsilon 2^{-T_{\mathcal{O}}-1}$. Montrer que pour tout $x \in X$ il existe $x_{\mathcal{O}} \in \mathcal{O}$ tel que

$$\forall 0 \leq k < T_{\mathcal{O}},\ |(\psi-\phi)(\sigma^k x) - (\psi-\phi)(\sigma^k x_{\mathcal{O}}| \leq \frac{\epsilon}{2}\mathsf{d}_{\mathcal{O}}(x).$$

<u>*Indication :*</u> *on pourra remarquer que $\sigma : (X, \mathsf{d}) \circlearrowleft$ est 2-lipschitzienne.*

(3) En déduire que pour $\psi_\epsilon = \psi - \epsilon \mathsf{d}_{\mathcal{O}}$ on a

$$\forall \nu \in \mathcal{M}(\sigma, X),\ \int (\psi_\epsilon - \phi)\, d\nu \leq \int (\psi - \phi)\, d\mu_{\mathcal{O}} - \frac{\epsilon}{2}\int \mathsf{d}_{\mathcal{O}}\, d\nu.$$

(4) Conclure que μ est l'une unique mesure ψ_ϵ-maximisante.

2 Sous-actions

Pour $\phi \in Lip$ et $x_0 \in X$ fixés, on considère l'opérateur $\mathcal{L} : Lip \circlearrowleft$ défini par

$$\forall \psi \in Lip,\ \mathcal{L}\psi(x) := \max_{\sigma(y)=x} (\alpha(\phi) + \phi(y) + \psi(y))$$

et

$$\tilde{\mathcal{L}}\psi = \mathcal{L}\psi - \mathcal{L}\psi(x_0).$$

On rappel le théorème de point fixe de Schauder :

Théorème.
Soit C un compact convexe d'un espace vectoriel normé et soit $T : C \to C$ une application continue. Alors T a un point fixe.

(1) Montrer que pour tout $\psi \in Lip,\ L(\mathcal{L}\psi) \leq \frac{1}{2}(L(\psi) + L(\phi))$.

(2) On munit l'ensemble $E := \{\psi \in Lip, \|\psi\| \leq \|\phi\|\}$ de la distance $\delta(\psi, \psi') = \sup_{x \in X} |\psi(x) - \psi'(x)|$. Montrer que :

   i) (E, δ) est compact,

   ii) $\tilde{\mathcal{L}}(E) \subset E$,

   iii) $\tilde{\mathcal{L}} : E \circlearrowleft$ est continue.

(3) A l'aide du théorème de Schauder, montrer l'existence de $u \in E$ et $c \in \mathbb{R}$ vérifiant $\mathcal{L}u = u + c$.

(4) On pose $\overline{\phi} = \alpha(\phi) + \phi + u - u \circ \sigma$.

   i) Etablir $\alpha(\overline{\phi}) = 0$.

   ii) Vérifier que $\overline{\phi} \leq c$. En déduire que $c \geq 0$.

   iii) Montrer que pour tout $x \in X$
   $$[\overline{\phi}(x) = c] \Leftrightarrow [\mathcal{L}u \circ \sigma(x) = \alpha(\phi) + \phi(x) + u(x)].$$

   iv) En déduire qu'il existe $\nu \in \mathcal{M}(X, \sigma)$ avec $\nu\left(\{\overline{\phi} = c\}\right) = 1$, puis que $c = 0$.
   Indications : *On pourra remarquer* $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \sigma^{-k}\{\overline{\phi} = c\} \neq \emptyset$.

   v) Conclure que $Max(\phi) = Max(\overline{\phi}) = \left\{\nu \in \mathcal{M}(X, \sigma),\ supp(\nu) \subset \{\overline{\phi} = 0\}\right\}$, où $supp(\nu)$ désigne le support de la mesure ν.

3 Orbites périodiques près d'un sous-décalage

Pour un sous-décalage à alphabet fini (Y, σ), on notera $\mathcal{L}_n(Y)$ l'ensemble des mots de Y de longueur n. On considère un sous-décalage apériodique K de X, i.e. K est compact de X avec $\sigma(K) \subset K$ et K sans point périodique. On définit une structure de graphe sur $\mathcal{L}_n(K)$ en définissant une flèche de u vers v, deux mots de $\mathcal{L}_n(K)$, si et seulement si la concatenation uv appartient à $\mathcal{L}_{2n}(K)$. Soit Σ_n le sous-décalage de type fini associé. Pour une orbite périodique $\mathcal{O}$ de (X, σ), on note $\gamma(\mathcal{O}) = \min_{y \neq z \in \mathcal{O}} \mathsf{d}(y, z)$, $\Sigma_K(\mathcal{O}) = \sum_{z \in \mathcal{O}} \mathsf{d}_K(z)$ et $T(\mathcal{O})$ sa période. Un point périodique pour le décalage sera dit k-périodique si sa période est inférieure ou égale à k.

(1) Montrer que
$$\forall \alpha > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N \, \forall k \in \mathbb{N}^*, \; \frac{\sharp \mathcal{L}_n(K)^k}{\sharp \mathcal{L}_{nk}(K)} \leq e^{\alpha n k}.$$

(2) Montrer que si $(u_n)_n \in (\mathcal{L}_n(K))^{\mathbb{N}}$ est un point k-périodique de Σ_n, alors l'orbite $\mathcal{O}$ associée de (X, σ) est nk-périodique et vérifie $\mathsf{d}_K(z) \leq 1/2^n$ pour tout $z \in \mathcal{O}$.

(3) On suppose dans cette question que Σ_n n'a pas de point k-périodique.

i) Montrer que tout mot de longueur k de Σ_n a k lettres distinctes deux à deux.

ii) Montrer que deux mots distincts de longueur k de Σ_n n'ont pas le même ensemble de lettres.

iii) En déduire que
$$\sharp \mathcal{L}_{nk}(K) \leq \sharp \mathcal{L}_k(\Sigma_n) \leq \binom{\sharp \mathcal{L}_n(K)}{k} \leq \left(\frac{e \sharp \mathcal{L}_n(K)}{k} \right)^k.$$

(4) Conclure que pour tout $\delta > 0$ et tout $T > 0$ il existe une orbite périodique $\mathcal{O}$ de (X, σ) satisfaisant
$$T \leq T(\mathcal{O}) \leq \Sigma_K(\mathcal{O})^{-\delta}.$$

(5) Nous allons montrer dans cette question que pour tout $\beta > 0$ il existe une orbite périodique $\mathcal{O}$ de (X, σ) satisfaisant
$$\Sigma_K(\mathcal{O}) < \beta \gamma(\mathcal{O}).$$
On raisonne par l'absurde en supposant le contraire pour un certain $\beta > 0$.

i) Montrer que pour toute orbite périodique $\mathcal{O}_0$ avec $T(\mathcal{O}_0) > 2$ il existe une orbite périodique $\mathcal{O}_1$ avec $T(\mathcal{O}_1) \leq T(\mathcal{O}_0)/2$ avec $\Sigma(\mathcal{O}_1) \leq (1 + 1/\beta) \Sigma_K(\mathcal{O}_0)$.
<u>*Indications :*</u> *On pourra considérer une orbite périodique obtenue en "recollant" deux points $z_0 \neq \sigma^k(z_0)$ de $\mathcal{O}_0$ avec $d(z_0, \sigma^k(z_0)) = \gamma(\mathcal{O}_0)$ et $k > 0$ minimal.*

ii) En construisant de façon similaire $\mathcal{O}_n$ pour $n = 2, ...$, obtenir une contradiction en prenant pour $\mathcal{O}_0$ l'orbite périodique de la question 4) pour δ et T bien choisis.

4 Perturbation

On considère une fonction $\phi \in Lip$ tel que $Max(\phi)$ ne contient pas de mesure supportée par une orbite périodique. Soit $\beta < 1$ et $\nu \in Max(\phi)$. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite périodique associée à $K = supp(\nu) \subset \{\overline{\phi} = 0\}$ donnée par la question 3.5. Remarquez que l'on peut supposer $\gamma(\mathcal{O}) < 1/2$. Nous allons montrer dans cette partie que pour β bien choisi, la mesure μ supportée par $\mathcal{O}$ est $\overline{\phi}_\epsilon := \left(\overline{\phi}\right)_\epsilon = \overline{\phi} - \epsilon \mathsf{d}_{\mathcal{O}}$ maximisante (avec les notations de la partie 1) pour tout $\epsilon > 0$. Pour $\xi > 0$ on notera $\mathcal{O}^\xi$ le ξ-voisinage de $\mathcal{O}$. On fixe $\epsilon > 0$.

(1) Vérifier que $Max(\phi_\epsilon) = Max(\overline{\phi}_\epsilon)$.

(2) Montrer que $-L(\overline{\phi})\beta\frac{\gamma(\mathcal{O})}{T(\mathcal{O})} < \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}} < 0$.
<u>Indications :</u> *On pourra remarquer que pour $x \in \mathcal{O}$ on a $-\overline{\phi}(x) \leq L(\overline{\phi})d_K(x)$.*

(3) Soit $\delta = L(\overline{\phi})\frac{\beta}{\epsilon}\frac{\gamma(\mathcal{O})}{T(\mathcal{O})}$. On choisit β petit de sorte que $\delta < \gamma(\mathcal{O})/2$. Soit $y \in \mathcal{O}^\delta \setminus \mathcal{O}$. Il existe alors $0 \leq m < n$ tels que $\sigma^k(y) \in \mathcal{O}^\delta$ pour $0 \leq k \leq m$, $\sigma^k(y) \in \mathcal{O}^{\gamma(\mathcal{O})} \setminus \mathcal{O}^\delta$ pour $m < k < n$ et $\sigma^n(y) \notin \mathcal{O}^{\gamma(\mathcal{O})}$.

i) Montrer qu'il existe $z_{\mathcal{O}} \in \mathcal{O}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{m} \left|\overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) - \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y)\right| \leq 2(L(\overline{\phi}) + \epsilon)\delta.$$

ii) Vérifiez que pour $M = \left[\frac{m}{T(\mathcal{O})}\right]$ on a

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k z_{\mathcal{O}}) - MT(\mathcal{O}) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}\right| \leq T(\mathcal{O}) \left|\int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}\right|.$$

iii) Montrer que pour $x \notin \mathcal{O}^\xi$ on a $|\overline{\phi}_\epsilon(x)| \geq \epsilon\xi$.

iv) En déduire que pour β bien choisi, on a avec les notations de la question 3)

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{\phi}_\epsilon(\sigma^k y) \leq (n+1) \int \overline{\phi}_\epsilon \, d\mu_{\mathcal{O}}.$$

(4) Déduire de la question précédente que $\mu_{\mathcal{O}}$ est une mesure maximisante de $\overline{\phi}_\epsilon$.
<u>Indications :</u> *Pour $\nu \neq \mu_{\mathcal{O}}$ ergodique et $x \in X$ un point ν-typique, on découpera convenablement l'orbite de x, puis on utilisera l'inégalité obtenue dans la question précédente.*

5 Conclusion

Conclure la preuve du théorème.