DEVOIR MAISON MAT551 - 2020
A RENDRE POUR LE 6 NOVEMBRE

1 Cobords et mesures invariantes

Soit (X, T) un système dynamique topologique. On note $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. Une fonction ϕ de $C(X)$ est appelée un cobord lorsqu'il existe $\psi \in C(X)$ satisfaisant $\phi = \psi \circ T - \psi$. On écrira $C_b(X,T) \subset C(X)$ le sous ensemble des cobords :

$$C_b(X,T) = \{\phi \in C(X),\, \exists \psi \in C(X) \text{ tel que } \phi = \psi \circ T - \psi\}\,.$$

Enfin on pose

$$C_m(X,T) := \left\{\phi \in C(X),\, \int \phi\, d\mu = 0 \text{ pour tout } \mu \in \mathcal{M}(X,T)\right\}.$$

(1) Montrer que $C_m(X,T)$ est fermé dans $C(X)$ et établir l'inclusion $\overline{C_b(X,T)} \subset C_m(X,T)$.

(2) On suppose $\overline{C_b(X,T)} \neq C_m(X,T)$.

i. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue Λ de $C(X)$ satisfaisant $\overline{C_b(X,T)} \subset \{\phi \in C(X),\, \Lambda(\phi) = 0\} \subsetneq C_m(X,T)$.

ii. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure signée finie μ telle que $\Lambda(\phi) = \int \phi\, d\mu$ pour tout $\phi \in C(X)$. Pour une telle mesure μ, il existe des mesures positives finies boréliennes μ_+, μ_- mutuellement singulières[1] avec $\int \phi\, d\mu = \int \phi\, d\mu_+ - \int \phi\, d\mu_-$ pour tout $\phi \in C(X)$. Ainsi définies les mesures μ_+ et μ_- sont uniques et si ν_+, ν_- sont des mesures positives finies avec $\int \phi\, d\mu = \int \phi\, d\nu_+ - \int \phi\, d\nu_-$ pour tout $\phi \in C(X)$, alors on a $\nu_+(A) \geq \mu_+(A)$ et $\nu_-(A) \geq \mu_-(A)$ pour tout Borélien A.

Montrer que μ_+ et μ_- sont T-invariantes.

iii. Conclure que $\overline{C_b(X,T)} = C_m(X,T)$.

(3) Montrer que pour tout $\phi \notin C_m(X,T) + \mathbb{R} := \{\phi + c,\, \phi \in C_m(X,T) \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$ il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(X,T)$ ergodiques avec $\int \phi\, d\mu_1 \neq \int \phi\, d\mu_2$.

Soit σ le décalage sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ défini par $\sigma((u_n)_n) = (u_{n+1})_n$ pour tout $(u_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

(4) Montrer que les mesures périodiques sont denses parmi les mesures ergodiques de $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$. En déduire que pour tout $\phi \notin C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}$ il existe des mesure périodiques μ_1, μ_2 satisfaisant $\int \phi\, d\mu_1 \neq \int \phi\, d\mu_2$.

(5) On note $H(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ le sous ensemble de $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ formé des fonctions Hölder. D'après le théorème de Lisvic (voir examen 2019), on a $H(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \cap C_b(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) = H(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \cap C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma))$.

1. On rappelle que deux mesures boréliennes μ et ν sur X sont mutuellement singulières s'il existe un Borélien E avec $\mu(E) = 1$ et $\nu(E) = 0$.

Montrer que $H(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \cap \big(C_b(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}\big)$ est d'intérieur vide dans $H(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. En déduire que $C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}$ est d'intérieur vide dans $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

2 Ensemble de divergence : quelques généralités

Pour $\phi \in C(X)$, on note $\mathcal{B}(\phi)$ l'ensemble de divergence de ϕ, i.e. l'ensemble des points où les moyennes de Birkhof divergent :

$$\mathcal{B}(\phi) := \left\{ x \in X,\ \underline{\lim}_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) < \overline{\lim}_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) \right\}.$$

(6) Vérifier que $\mathcal{B}(\phi)$ est un ensemble borélien σ-invariant de μ-mesure nulle pour tout mesure $\mu \in \mathcal{M}(X, \sigma)$. Montrer que si (X, T) est uniquement ergodique alors $\mathcal{B}(\phi)$ est vide pour tout $\phi \in C(X)$.

(7) Vérifier que $\mathcal{B}(\phi)$ est vide si $\phi \in C_m(X, T)$ et qu'alors on a $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(x) = 0$ pour tout $x \in X$.

3 Ensemble de divergence pour des dynamiques minimales

Dans cette partie on suppose (X, T) minimal. On considère $\phi \notin C_m(X, T) + \mathbb{R}$.

(8) Soit $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ une mesure ergodique. Pour $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$W(N, \epsilon) := \left\{ x \in X,\ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) \geq \int \phi \, d\mu + \epsilon \text{ pour tout } n \geq N \right\}.$$

Montrer que $W(N, \epsilon)$ est un fermé d'intérieur vide pour tout $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

(9) Conclure que $\mathcal{B}(\phi)$ contient un sous ensemble $\mathcal{G}_\delta$ dense de X.

4 Ensemble de divergence pour le décalage sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

On considère de nouveau le décalage σ sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\phi \notin C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}$. On rappelle que le n-cylindre associé à un mot fini de longueur n est l' ensemble des suites de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dont les n-premières coordonnées coincide avec ce mot. Soit C_n l'ensemble des n-cylindres. Pour un sous ensemble K de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, a priori ni compact ni σ-invariant, on définit l'entropie topologique de σ sur K comme suit :

$$h_{top}(K) := \overline{\lim}_n \frac{1}{n} \log \sharp \{ C \in C_n,\ C \cap K \neq \emptyset \}.$$

(10) Soit $\mu_{\max}$ la mesure de Bernoulli de paramètre $(1/2, 1/2)$. Montrer qu'il existe un sous ensemble L de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ avec $h_{top}(L) = \log 2$ tel que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k$ converge uniformément vers $\int \phi \, d\mu_{max}$ sur L quand n tend vers l'infini.

Soient μ_1, μ_2 des mesures périodiques comme en (4). Dans la suite on note $w_i \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{0,1\}^n$, $i = 1, 2$ un mot fini tel que μ_i soit associée à la suite périodique $w_i.w_i.w_i \cdots$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ obtenue par concaténation successive de w_i (on notera $u.v$ la concaténation de deux mots finis u et v). Pour un mot infini $w \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ on note $w(n) \in \{0,1\}^n$ le mot tronqué défini par les n premières coordonnées de w.

(11) Soient $l = (l_k)_k$, $m = (m_k)_k$ et $n = (n_k)_k$ trois suites strictement croissantes d'entiers à préciser. On considère le sous-ensemble $K = K(l, m, n)$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ formé des suites u obtenues par concaténation successives de la façon suivante. A toute suite $(w^k)_k \in L^{\mathbb{N}}$ on définit par récurrence les mots u_p, $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \emptyset, \\ u_{2k+1} &= u_{2k}.w^{2k}(l_{2k}).\underbrace{w_1.\cdots.w_1}_{m_k \text{ fois}}, \\ u_{2k+2} &= u_{2k+1}.w^{2k+1}(l_{2k+1}).\underbrace{w_2.\cdots.w_2}_{n_k \text{ fois}}. \end{aligned}$$

On note alors u la suite infinie de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *limite* des mots u_p, i.e. dont les mots finis u_p sont des troncatures. Soit q_k la longueur commune des mots finis u_k. On suppose que $\lim_k \frac{q_{k+1}}{q_k} = +\infty$ et que les limites suivantes sont bien définies : $\delta_1 := \lim_k \frac{l_{2k}}{|w_1|m_k + l_{2k}}$ et $\delta_2 := \lim_k \frac{l_{2k+1}}{|w_2|n_k + l_{2k+1}}$, où $|w_i|$ désigne la longueur du mot w_i.

i. Montrez que
$$h_{top}(K) \geq \max_i \delta_i \cdot \log 2.$$

ii. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier r tel que pour tout x, y dans un même r-cylindre on ait $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$.

iii. Montrer que pour tout $u \in K$,
$$\underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u) \leq \delta_1 \int \phi \, d\mu_{max} + (1 - \delta_1) \int \phi \, d\mu_1,$$
$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u) \geq \delta_2 \int \phi \, d\mu_{max} + (1 - \delta_2) \int \phi \, d\mu_2.$$

iv. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, on peut choisir les suites l, m, n de sorte que $h_{top}(K) \geq (1 - \alpha) \log 2$ et pour tout $u \in K$,
$$\underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u) < \overline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u).$$

(12) Conclure que pour $\phi \notin C_m(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) + \mathbb{R}$, l'ensemble de divergence $\mathcal{B}(\phi)$ est d'entropie totale :
$$h_{top}(\mathcal{B}(\phi)) = \log 2.$$