DEVOIR MAISON MAT551 - 2021
QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ÉCHANGES D'INTERVALLE, A RENDRE POUR LE 19 NOVEMBRE

Un échange d'intevalle est une translation par morceaux de l'intervalle $[0,1[$. Plus précisément une telle transformation f est donnée par une partition finie P de l'intervalle $[0,1[$ en sous-intervalles $J_i = [a_{i-1}, a_i[,\ i = 1, \cdots, r$ avec $0 = a_0 < \cdots a_k \cdots < a_r = 1$ et par une permutation π de $\{1, \cdots, r\}$. L'échange d'intervalle $f : [0,1[\circlearrowleft$ associé à P et π est la bijection de $[0,1[$ définie comme suit :

— $f|_{J_i}$ est une translation pour tout i,

— $[\forall (x,y) \in J_k \times J_l,\ f(x) < f(y)] \Leftrightarrow [\pi(k) < \pi(l)]$.

On parle de k-échange d'intervalles si $\sharp P = k \in \mathbb{N}^*$. On notera $A(f) := \{a_i,\ i = 1, \cdots, r-1\}$ et $\mathcal{M}(f, [0,1[)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes de $[0,1[$ invariantes par f.

1) On pose $\lambda_i = a_i - a_{i-1},\ i = 1, \cdots, r$. Montrer que

$$\forall i = 1, \cdots, r\ \forall x \in J_i,\ f(x) = x + \sum_{\pi(j) < \pi(i)} \lambda_j - \sum_{j<i} \lambda_j.$$

2) Vérifier que la mesure de Lebesgue sur l'intervalle, notée m, est f-invariante.

1 Préliminaires

1.1 Irréductibilité et puissance. On dit que l'échange d'intervalle est minimal quand l'orbite $\{f^n x,\ n \in \mathbb{N}\}$ de tout point $x \in [0,1[$ est dense dans $[0,1[$. On dit que l'échange d'intervalle est **irréductible** s'il n'existe pas d'entier $k \in [1, r-1]$ tel que $\pi(\{1, \cdots, k\}) = \{1, \cdots, k\}$.

3) Montrer que tout échange d'intervalle minimal est irréductible.

4) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'application itérée f^m est aussi un échange d'intervalle avec $A(f^m) \subset \bigcup_{k=0}^{m-1} f^{-k} A(f)$.

1.2 Induction. Soit $J = [a, b[\neq \emptyset$ un sous-intervalle de $[0,1[$. On note

$$B_J := \{a, b\} \cup \{a_i,\ i = 1, \cdots, r-1\}.$$

Pour tout $x \in [0,1[$, on pose $s(x) = \inf\{n \in \mathbb{N},\ f^{-n}x \in]a,b[\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$ et f^0 égale à l'identité. On considère alors l'ensemble $C_J := \{f^{-s(x)}x,\ x \in B_J \text{ avec } s(x) < +\infty\}$.

5) Montrer que $\sharp C_J \leq r+1$.

6) On note $C_J \cup \{a, b\} := \{d_0 = a < d_1 < \cdots < d_s = b\}$. Montrer à l'aide du principe de récurrence de Poincaré, que pour tout $j = 0, \cdots, s-1$ il existe un entier $n > 0$ tel que $f^n([d_j, d_{j+1}[) \cap J \neq \emptyset$. On note n_j le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette propriété.

7) Vérifier que la restriction de f^{n_j} à $[d_j, d_{j+1}[$ est une translation.

8) Montrer que $f^{n_j}([d_j, d_{j+1}[) \subset J$. En déduire que le temps de retour τ_J dans J, défini par $\tau_J(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(x) \in J\}$ pour $x \in J$, est égal à n_j sur $[d_j, d_{j+1}[$. Par la suite on note $\mathcal{N}(J) := \{n_j, j = 0, \cdots, s-1\}$.

9) En déduire que l'application $f^J := f^{\tau_J}$ de premier retour dans J est un k-échange d'intervalle avec $k \leq r+2$.

10) Montrer que les composantes connexes de $E_J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n J$ sont en nombre fini et de la forme $[c, d[$. Verifier également que $f(E_J) = E_J$.

1.3 Mesures invariantes. Dans cette partie 1.3, on suppose f minimal.

11) Montrer que toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(f,[0,1[)$ est sans atomes[1] et vérifie $\mu(O) > 0$ pour tout ouvert O non vide. Indications : Pour ce dernier point on pourra considérer un point x dans le support de μ tel que $f^n x \neq a_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [0,r]$.

12) Montrer que pour, $\phi_\mu : x \mapsto \mu([0,x[)$ conjugue les systèmes dynamiques probabilistes (f,μ) à (g_μ, m), i.e. $g_\mu \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ f$ avec g_μ un autre échange d'intervalle. Déterminer la permutation et la partition associées à g_μ.

13) On considère l'application $\Phi : \mathcal{M}(f,[0,1[) \to \Delta_r$ avec $\Delta_r := \{(x_i)_{i=1,\cdots,r},\ x_i \geq 0 \text{ et } \sum_i x_i = 1\}$ définie pour tout μ par $\Phi(\mu) = (\mu([a_{i-1},a_i[))_{i=1,\cdots,r}$. Montrer que Φ est un homéomorphisme affine sur son image. Indications : On pourra vérifier que $((g_\mu)^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ détermine complètement ϕ_μ.

14) Montrer que $\Phi(\mathcal{M}(f,[0,1[))$ est d'intérieur vide dans Δ_r. En déduire que f a au plus $r-1$ mesures ergodiques.

2 Condition de Keane et minimalité.

On dit que f satisfait **la condition de Keane** lorsque les orbites de a_i, $i = 1,\cdots,r-1$ sont infinies et disjointes.

15) Montrer que la condition de Keane entraine l'irréductibilité.

16) Supposons que f admet un point m-périodique. Montrer qu'il existe $i \in \{0,\cdots,r-1\}$ tel que $f^m a_i = a_i$. En déduire que la condition de Keane entraine l'apériodicité.

17) Soit $J = [a,b[\neq \emptyset$ fixé. On note G les extrémités gauches des composantes connexes de E_J. Montrer que pour tout $x \in G \setminus \{0\}$, on a $f(x) \in G$ (resp. $f^{-1}x \in G$) ou $x \in A(f)$ (resp. $x \in f(A(f))$).

18) En déduire avec **16**) que si f satisfait la condition de Keane, on a $E_J = [0,1[$ pour tout J.

19) Conclure que la condition de Keane entraine la minimalité.

3 Non mélange.

20) On suppose le système dynamique probabiliste (f,m) ergodique. Montrer avec les notations de la question **10**) que $E_J = [0,1[$ pour tout $J = [a,b[\neq \emptyset$.

21) Pour tout $J = [a,b[\neq \emptyset$, on note P_J la partition de $[0,1[$ en temps de retour donnée par

$$P_J := \{f^i[d_j, d_{j+1}[,\ 0 \leq i < n_j,\ j = 0,\cdots,s-1\}.$$

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe $x \in [0,1[$ avec $f^k x \neq x$ pour $k = 0,\cdots,N$. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir J tel que le diamètre de P_J est inférieur à $1/N$ et le temps de retour τ_J est supérieur à N. Puis montrer que pour tout ensemble borélien X et pour tout N, il existe J et $A \in P_J$ satisfaisant $\tau_J > N$ et $\mathrm{m}(A \Delta X) < 1/N$.

22) Pour tout $j = 0,\cdots s-1$ on note $\mathcal{N}([d_j,d_{j+1}[) = \{n_{i,j}, i\}$ les temps de retour dans $[d_j, d_{j+1}[\subset J$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout j on a

$$f^n[d_j, d_{j+1}[\subset \bigcup_i f^{-n_{i,j}}(f^n[d_j,d_{j+1}[).$$

En déduire que pour tout $A \in P_J$ on a

$$A \subset \bigcup_{j=0,\cdots s-1} \bigcup_i f^{-n_{i,j}} A.$$

---

1. i.e. $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$

23) En déduire que $\mathrm{m}(A) \leq \frac{1}{(r+2)^2}\mathrm{m}(A \cap f^{-n_{i,j}}A)$ pour un certain $n_{i,j}$.

24) Montrer avec la Question **20**) que pour tout borélien X avec $\mathrm{m}(X) < \frac{1}{4(r+2)^2}$ on a

$$\limsup_n \mathrm{m}(X \cap f^{-n}X) > \mathrm{m}(X)^2.$$

25) Conclure que (f, μ) n'est pas mélangeante pour tout $\mu \in \mathcal{M}(f, [0,1])$.