Introduction aux systèmes dynamiques et à la théorie ergodique

Devoir Maison

On considère les applications de l'intervalle $f_\alpha : [0,1] \circlearrowleft$ avec $\alpha > 0$ définies par

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= x + 2^\alpha x^{\alpha+1} \quad \text{pour } x \in [0,1/2], \\ &= 2x - 1 \quad \text{pour } x \in]1/2,1]. \end{aligned}$$

On note m la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et $\mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Le bassin $\mathcal{B}(\mu)$ d'une mesure de probabilité f_α-invariante μ est défini comme suit :

$$\mathcal{B}(\mu) := \left\{ x \in [0,1],\ \forall \phi \in \mathcal{C}([0,1])\ \frac{1}{n} \sum_{0 \le k < n} \phi(f_\alpha^k x) \xrightarrow{n \to +\infty} \int \phi \, d\mu \right\}$$

Le but de ce problème est de montrer le théorème suivant :

Théorème.
Avec les notations précédentes,

— si $\alpha < 1$, il existe une unique mesure de probabilité f_α-invariante ergodique μ absolument continue [1] par rapport à m et $m(\mathcal{B}(\mu)) = 1$.

— si $\alpha \ge 1$, on a $m(\mathcal{B}(\delta_0)) = 1$, où δ_0 désigne la mesure de Dirac en 0.

1 Induction et mesures invariantes

Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité et $f : X \circlearrowleft$ une application mesurable et soit $A \in \mathcal{B}$ avec $m(A) > 0$, tel que m-presque tout point de A revient dans A. On peut alors définir l'application de premier retour $f_A : A \circlearrowleft$ dans A en m-presque tout point. On note $\tau_A : A \to \mathbb{N}^*$ le temps de premier retour dans A. On suppose dans cette partie que f_A admet une mesure de probabilité invariante $\tilde{\nu} \ll m|_A$. Le système probabiliste $(A, \mathcal{B}_A, f_A, \tilde{\nu})$ est ainsi bien défini.

On pose alors

$$\nu := \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j \left(\tilde{\nu}|_{\tau_A > j} \right),$$

où $\tilde{\nu}|_{\tau_A > j}$ est la mesure restreinte à $\{\tau_A > j\}$, i.e. $\tilde{\nu}|_{\tau_A > j}(\cdot) = \tilde{\nu}\left(\cdot \cap \{\tau_A > j\}\right)$.

1. On rappelle que si μ et ν sont deux mesures sur un même espace mesurable alors ν est dite absolument continue par rapport à μ (ce que l'on note $\nu \ll \mu$) si tout ensemble mesurable de mesure nulle pour μ est de mesure nulle pour ν.

1) On suppose $f_*m \ll m$. Montrez que $\nu \ll m$.

2) Vérifiez que ν est une mesure (pas nécéssairement finie) f-invariante satisfaisant $\nu \geq \tilde{\nu}$.

3) Montrez que ν est finie si et seulement si $\int \tau_A \, d\tilde{\nu} < +\infty$.

4) On suppose $\int \tau_A \, d\tilde{\nu} < +\infty$ et $\tilde{\nu}$ ergodique. Montrez que ν est ergodique.

2 Mesures invariante absolument continue pour les applications Markovienne dilatantes par morceaux

On considère dans cette partie indépendante une application $g : [0,1] \circlearrowleft$ et une partition P dénombrable de $[0,1]$ en intervalles tel que

— il existe $\alpha > 1$, tel que pour tout $B \in P$, la restriction $g|_A$ est une application C^1 avec $|(g|_B)'(x)| \geq \alpha$ pour tout $x \in B$

— pour tout $B \in P$, on a $g(B) = (0,1)$,

— il existe $c > 0$ tels que pour tout $B \in P$,

$$\forall x, y \in B, \ \log \frac{|g'(x)|}{|g'(y)|} \leq c|g(x) - g(y)|.$$

Le but de cette partie est de montrer que f admet une mesure invariante ergodique équivalente $\tilde{\nu}$ à la measure de Lebesgue telle que $\frac{1}{K} < \frac{d\tilde{\nu}}{dm} < K$ pour un certain $K > 1$.

Pour $h \in L^1(m)$, on pose

$$\forall x, \ \mathcal{L}h(x) := \sum_{g(y)=x} \frac{h(y)}{|g'(y)|}.$$

5) Montrer que $\mathcal{L}h$ définit une fonction de $L^1(m)$ et qu'on a pour tout $\phi \in L^\infty(m)$

$$\int \phi \cdot \mathcal{L}h \, dm = \int \phi \circ g \cdot h \, dm.$$

6) Montrer que si une fonction positive h avec $\int h \, dm = 1$ vérifie $\mathcal{L}h = h$, alors la mesure de densité h par rapport à m est g-invariante.

7) On note A_p, $p \in \mathbb{N}$, les atomes de P et g_p la restriction de g à A_p. Montrer que pour tout $i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N}$ on a pour une certaine constante $C > 0$

$$\forall i_1, \cdots, i_n, \forall x, y \in (0,1), \ \left| \frac{(g^n)'\left((g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(y)\right)}{(g^n)'\left((g_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ g_{i_n}^{-1})(x)\right)} \right| \leq 1 + C|x - y|.$$

8) On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (qui peut différer de celle de la question précédente) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\mathcal{L}^n\mathbf{1} = \underbrace{\mathcal{L} \circ \cdots \circ \mathcal{L}}_{\text{n fois}}\mathbf{1}$ vérifie

$$\forall x, y,\ |\mathcal{L}^n\mathbf{1}(x) - \mathcal{L}^n\mathbf{1}(y)| \le C|x-y|\mathcal{L}^n\mathbf{1}(x).$$

9) En déduire que

$$\forall x,\ \frac{1}{C+1} \le \mathcal{L}^n\mathbf{1}(x) \le 1 + C.$$

10) Montrer alors avec le théorème d'Ascoli que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\le k<n}\mathcal{L}^n\mathbf{1}\right)_n$ admet une sous-suite qui converge uniformément.

11) En déduire que g admet une mesure invariante équivalente $\tilde{\nu}$ à la measure de Lebesgue telle que $\frac{1}{K} < \frac{d\tilde{\nu}}{dm} < K$ pour un certain $K > 1$.

12) Montrer que la mesure $\tilde{\nu}$ ainsi obtenue est ergodique. Indications : on pourra considérer un point de densité de Lebesgue d'un ensemble invariant et raisonner comme pour l'application de Gauss.

3 Cas $\alpha < 1$

On notera $f = f_\alpha$. On définit par récurrence la suite $(z_n)_n$ par $z_{-1} = 1$, $z_0 = 1/2$ et $z_{n+1} \in [0, 1/2]$ avec $f(z_{n+1}) = z_n$. On pose aussi $A =]1/2, 1]$. On notera f_A l'application de premier retour pour f dans A, i.e. $f_A := f^{\tau_A} : A \circlearrowleft$.

13) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \{\tau_A = n\} = \left]\frac{z_{n-1}+1}{2}, \frac{z_{n-2}+1}{2}\right].$$

14) Montrer qu'il existe $a > 0$ telle que $z_n \sim^n an^{-1/\alpha}$.

15) En déduire que $\int_A \tau_A \, dm < +\infty$ si et seulement si $\alpha < 1$.

16) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n,\ \forall x, y \in \{\tau_A = n\},\ \left|\frac{(f^n)'(x)}{f^n)'(y)}\right| \le C$$

17) Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $x', y' \in \{\tau_A = l\}$, on a

$$\frac{|x'-y'|}{m(\{\tau_A = l\})} \le 2C|f^l x' - f^l y'|.$$

18) Montrer que $g = f_A$ satisfait les conditions de la partie 2 lorsque $\alpha < 1$. On notera $\tilde{\nu}$ la mesure associée.

19) Déduire des questions précédentes le premier item du théorème (cas $\alpha < 1$).

4 Cas $\alpha \geq 1$

On suppose désormais $\alpha \geq 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = [0, z_k]$. Pour $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère $s = s(n,x)$ l'entier (s'il existe) tel que $\sum_{t=0}^{s} \tau_A(f_A^t x) < n \leq \sum_{t=0}^{s+1} \tau_A(f_A^t x)$. On pose également

$$N_s(l,x) := \sharp\{0 \leq t < s,\ \tau_A(f_A^t x) = l+1\}.$$

20) Montrez que

$$\sharp\{0 \leq p < n,\ f^p x \notin U_k\} \leq (k+1)(s+2).$$

21) En déduire que

$$\frac{1}{n}\sharp\{0 \leq p < n,\ f^p x \notin U_k\} \leq \frac{(k+1)(s+2)}{\sum_l (l+1) N_s(l,x)}.$$

22) On rappelle que $\tilde{\nu}$ désigne la mesure donnée par la partie 2 (question 11) pour la fonction $g = f_A$. Montrez qu'il existe $E \subset A$ with $m(E) = m(A)$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $l \in E$,

$$\frac{N_s(l,x)}{s} \xrightarrow{s} \tilde{\nu}\left(\{\tau_A = l+1\}\right).$$

23) En déduire que pour $x \in E$ et tout k,

$$\frac{1}{n}\sharp\{0 \leq p < n,\ f^p x \notin U_k\} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

24) Conclure le cas $\alpha \geq 1$ du théorème.