

Introduction aux systèmes dynamiques et à la théorie ergodique

Devoir Maison

On note $\mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des difféomorphismes locaux du cercle $\mathbb{T}^1$ dans lui-même muni de la topologie $\mathcal{C}^1$ associée à la distance¹ $d_{\mathcal{C}^1}(T, S) = \sup_{x \in \mathbb{T}^1} |Tx - Sx| + \sup_{x \in \mathbb{T}^1} |T'(x) - S'(x)|$. On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$. On rappelle qu'une mesure borélienne μ sur $\mathbb{T}^1$ est absolument continue (ce que l'on note $\mu \ll m$) si tout borélien de m -mesure nulle est aussi de μ -mesure nulle. Le but de ce problème est de montrer le résultat suivant :

Théorème.

Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense $\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$ tel que tout $T \in \mathcal{E}$ n'admet pas de mesure de probabilité invariante absolument continue (m.i.a.c. en abrégé).

1 Caractérisation de l'absence d'm.i.a.c.

Soit T un difféomorphisme local de $\mathbb{T}^1$. Pour tout $\epsilon > 0$ on note H_ϵ l'hypothèse suivante :

(H_ϵ) : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact $K \subset \mathbb{T}^1$ et un entier positif k tel que

$$m(K) > 1 - \epsilon \text{ et } m(T^k K) < \epsilon$$

- 1) Montrer que si T admet une m.i.a.c. , alors (H_ϵ) n'est pas vérifié pour un certain $\epsilon > 0$.

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la première partie que T n'admet pas d'm.i.a.c.

- 2) Montrer que toute mesure limite μ de $(\frac{1}{n} \sum_{k < n} T^k m)_n$ est singulière.
 3) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact L et un entier positif k , tel que $m(T^{-k} L) < \epsilon/2$ et $m(L) > 1 - \epsilon$.
 4) Conclure que (H_ϵ) est satisfait pour tout $\epsilon > 0$.

1. par abus de notations on a noté $|Tx - Sx|$ la distance entre Tx et Sx sur le cercle et $T'x$ pour la dérivée en x d'un relevé de T à $\mathbb{R}$.

2 Partitions dynamiques

On considère un espace métrique compact X muni d'une mesure de proba borélienne que l'on note aussi m , ainsi qu'une application continue $T : M \rightarrow M$ avec $T_*m \ll m$ et $m(\text{Per}(T)) = 0$.

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Théorème.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $n > k$ et un borélien $U \subset M$ tel que

- $T^{-l}U$, $0 \leq l < n$, sont disjoints deux à deux,
- $m\left(\bigcup_{l=0, \dots, n-1} T^{-l}U\right) > 1 - \epsilon$,
- $m\left(\bigcup_{l=0, \dots, k} T^{-l}U\right) < \epsilon$.

Pour un entier positif n , un sous-ensemble A de X est appelé **n -libre** si les ensembles $T^{-l}A$, $l = 0, \dots, n-1$ sont deux à deux disjoints. Pour $A \subset X$ on note aussi

$$\overline{A} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} T^{-l}A$$

- 5) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit O un voisinage ouvert de $\text{Per}_n(T)$. Montrer qu'il existe un recouvrement fini $(U_i)_{1 \leq i < N}$ de $X \setminus O$ par des boules n -libres.
- 6) Soient $A, B \subset X$ des ensembles n -libres. Montrer que

$$C = (A \setminus \overline{B}) \cup \left(B \setminus \overline{(A \setminus \overline{B})} \right)$$

est n -libre.

- 7) Vérifier que $A \cup B \subset \overline{C}$.
- 8) Montrer qu'il existe V n -libre et $\overline{V} \supset X \setminus O$.
- 9) Montrer que pour tout $\epsilon' > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble n -libre W tel que $m(T^{-2n}\overline{W}) > 1 - \epsilon'$.
- 10) Montrer que pour tout $\epsilon' > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble n -libre W tel que $m(T^{-2n}\overline{W}) > 1 - \epsilon'$ et $m(W) < \epsilon'$.
- 11) Conclure la preuve du Théorème. *Indications* : On pourra considérer les ensembles $E_K := \bigcup_{l=K[\text{mod } n], l \geq n} \{\tau_W = l\}$ pour $0 \leq K < n$ avec $\tau_W(x) = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, T^k x \in W\}$.
- 12) Montrer que l'on peut supposer que U est un compact, puis un ouvert.
- 13) On suppose que T est un difféomorphisme local de $\mathbb{T}^1$. Expliquer pourquoi on peut pour tout $\eta > 0$ choisir $U = U_\eta$ comme une union fini d'intervalles fermés (non triviaux) tel que pour tout $0 \leq l < n-1$ toute composante connexe de $T^{-l-1}U$ est de diamètre inférieure à η et est envoyé bijectivement sur une composante connexe de $T^{-l}U$.

3 Perturbation

Soit $T \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$. Soient k, n, η, ϵ et $U = U_\eta$ comme dans la question précédente (on supposera $\epsilon < 1/2$). Pour tout arc de cercle $I = (c - a, c + a)$, où $1/2 > a > 0$ et $c \in \mathbb{T}^1$, on note I_ϵ l'arc de cercle $(c - a(1 - \epsilon), c + a(1 - \epsilon))$. On note K l'union des I_ϵ pour I composante connexe de $T^{-l}U$ pour $k < l < n$.

14) Montrer que $m(K) \geq (1 - 2\epsilon)(1 - \epsilon)$.

15) Pour $\beta \in]0, 1[$ montrer qu'il existe une fonction $\tilde{T} = T_{\epsilon, \eta, \beta} \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$ tel que

- $\tilde{T}$ envoie I (resp. affinement I_ϵ) sur TI (resp. $(TI)_{\beta\epsilon}$) pour toute composante connexe I de $T^{-l}U$, $0 \leq l < n$,
- $\tilde{T} = T$ en dehors de $\bigcup_{0 \leq l < n} T^{-l}U$,
- $d_{C_1}(T, \tilde{T}) < \eta + \sup_{|x-y| < \eta} |T'(x) - T'(y)| + 2 \frac{(1-\beta)(1-\epsilon)}{\epsilon} \sup_x |T'(x)|$.

16) Montrer que $m(\tilde{T}^k K) \leq \beta^k m(U)$.

4 Conclusion

17) Soit K un compact de I et $(T_n : \mathbb{T}^1 \curvearrowright)_n$ une suite d'applications continues convergeant uniformément vers T . Montrer que

$$m(TK) \geq \limsup_n m(T_n K).$$

18) Montrer que

$$\mathcal{E}^\epsilon := \{T \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1), \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \exists K \subset \mathbb{T}^1 \text{ compact} : m(K) > 1 - \epsilon \text{ et } m(T^k K) < \epsilon\}$$

est un ouvert de $\mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$.

19) **Bonus :** Montrer que $\{T \in \mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1), m(\text{Per}(T)) = 0\}$ est dense dans $\mathcal{E}_1(\mathbb{T}^1)$.

20) Montrer à l'aide des parties précédentes et du résultat de la question Bonus ci-dessus que $\mathcal{E}^\epsilon$ est dense.

21) Conclure la preuve du Théorème.