CONTROLE MAT551 - 2017 - DURÉE 3H

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

La qualité de la rédaction sera un facteur important de l'appréciation des copies.

1 Ensemble de rotation sur le tore $\mathbb{T}^2$

On considère un homéomorphisme f du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui admet un relevé $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfaisant $F(z+v) = F(z) + v$ pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ et tout $v \in \mathbb{Z}^2$. On définit

$$\rho(F) := \bigcap_n \overline{\bigcup_{p \geq n} \rho_p(F)} \text{ avec } \rho_p(F) := \left\{ \frac{F^p(z) - z}{p}, \ z \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On note ϕ_F la fonction induite sur le tore par la fonction $\mathbb{Z}^2$-périodique $z \mapsto F(z) - z$ puis on pose pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)$

$$\rho(\mu, F) := \int_{\mathbb{T}^2} \phi_F(z) \, d\mu(z).$$

(1) Soit $\mu \in \mathcal{M}_e(\mathbb{T}^2, f)$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{F^n(z) - z}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} \rho(\mu, F).$$

(2) Soit $\alpha \in \rho(F)$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)$ tel que $\alpha = \rho(\mu, F)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on pourra écrire $\frac{F^n(x)-x}{n}$ sous la forme $\int_{\mathbb{T}^2} \phi_F(z) \, d\mu_x(z)$ pour une certaine mesure de probabilité atomique μ_x.

(3) On admet que $\rho(F)$ est un ensemble convexe. En déduire que

$$\rho(F) = \{\rho(\mu, F), \ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2, f)\}.$$

(4) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue $\mathbb{Z}$-périodique et soit f la dynamique sur $\mathbb{T}^2$ induite par $F : (x, y) \mapsto (x + \phi(y), y)$. Décrire l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes f-invariantes ergodiques. Déterminer $\rho(F)$.

2 Solenoïde

Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. Pour $0 < \lambda < 1/2$ on considère la dynamique suivante sur le tore plein $\mathbb{S}^1 \times D$ de $\mathbb{R}^3$

$$\forall \theta \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \forall (x, y) \in D, \qquad F(\theta, x, y) = \left(2\theta, \lambda x + \frac{1}{2}\cos(2\pi\theta), \lambda y + \frac{1}{2}\sin(2\pi\theta)\right).$$

Le compact $\mathcal{S} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F^n(\mathbb{S}^1 \times D)$ s'appelle le solénoïde.

(1) Montrer que $(\mathcal{S}, F)$ définit un système dynamique topologique inversible. On pourra vérifier que F est injective sur $\mathbb{S}^1 \times D$.

(2) On considére le sous-ensemble Y de $(\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$ défini par

$$Y := \{(\theta_n)_n \in (\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}, \quad \theta_n = 2\theta_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

Vérifier que pour $(\theta_n)_n \in Y$, l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F^n(\theta_n \times D)$ est un singleton.

(3) On considère le système topologique (Y, α) défini pour tout $\Theta = (\theta_n)_n \in Y$ par $\alpha(\Theta) = (2\theta_0, \theta_0, \theta_1, ...)$. On note ϕ la projection de $\mathbb{S}^1 \times D$ sur la première coordonnée, i.e. $\phi : (\theta, x, y) \mapsto \theta$. Montrer que $\pi : z \mapsto \left(\phi(F^{-k} z)\right)_{k \geq 0}$ définit une conjugaison topologique de $(\mathcal{S}, F)$ vers (Y, α).

(4) Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en arcs de longueur inférieur à $1/2$. Montrer que les ouverts de Y donnés par $\{(\theta_n)_n \in Y, \ \theta_0 \in U\}$ pour $U \in \mathcal{U}$ forment un générateur topologique de (Y, α). En déduire que $(\mathcal{S}, F)$ est expansif.

(5) Montrez que l'entropie topologique de $(\mathcal{S}, F)$ est égale à $\log 2$. On rappelle que c'est le cas du doublement de l'angle $f : \theta \mapsto 2\theta$ sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ce que l'on pourra utiliser sans démonstration).

3 Dynamiques substitutives

Soit A un ensemble fini. On considère une substitution sur A, i.e. une application $\xi : A \to \bigcup_{k>0} A^k$. Si $a = a_1...a_k \in A^k$ et $b = b_1...b_l \in A^l$ on note $a \cdot b$ la concaténation des mots a et b donnée par

$$a \cdot b = a_1...a_k b_1...b_l \in A^{k+l}.$$

La substitution ξ induit une application, encore notée ξ, sur $A^{\mathbb{N}}$ et sur $\bigcup_{k>0} A^k$ de la façon suivante :

$$\xi(a_0 a_1 \dots a_n \dots) := \xi(a_0) \cdot \xi(a_1) \cdot \dots \xi(a_n) \cdot \dots$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note ξ^n la substitution définie par récurence pour tout $a \in A$ par $\xi^n(a) = \xi(\xi^{n-1}(a))$. Dans ce problème on considérera toujours une substitution ξ satisfaisant $|\xi^n(a)| \xrightarrow{n} +\infty$ pour tout $a \in A$, où $|\xi^n(a)|$ désigne la longueur du mot $\xi^n(a)$.

3.1 Points périodiques de la substitution $\xi : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$.

(1) Vérifier que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ et tout $c \in A^{\mathbb{N}}$ (ou $c \in \bigcup_{k>0} A^k$)

$$\xi^{n+m}(c) = \xi^n(\xi^m(c)).$$

(2) Montrer qu'il existe $a \in A$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que le mot $\xi^p(a)$ commence par la lettre a. Pour $b \in A$ fixé on pourra considérer la collection de mots $\{\xi^k(b),\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

(3) On munit $A^{\mathbb{N}}$ de la métrique $d\left((y_n)_n, (z_n)_n\right) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\delta_{y_n, z_n}}{2^n}$ avec $\delta_{u,v} = 0$ si $u = v$ et 1 sinon. Soit $x = (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ avec $x_0 = a$. Montrer que la suite $\left(\xi^{pn}(x)\right)_n$ est de Cauchy.

(4) Conclure qu'il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ satisfaisant $\xi^p(u) = u$.

3.2 Minimalité de $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$.

On suppose dorénavant qu'il existe $u \in A^{\mathbb{N}}$ avec $\xi(u) = u$. Quitte à restreindre l'alphabet A, toutes les lettres de A apparaissent dans u. Dans la suite on considère l'aphabet A donné par $A = \{1, ..., d\}$. On munit $A^{\mathbb{N}}$ du décalage σ et on considère le sous-décalage unilatère $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ avec $\mathcal{O}(u) = \{\sigma^k(u),\ k \in \mathbb{N}\}$. On étudie dans cette partie la minimalité de ce système. On admettra que le critère de minimalité vu en classe pour les sous-décalages bilatères est encore valide pour les décalages unilatères (Proposition 7.1 du polycopié).

(1) On note $M(\xi) = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ la matrice carré d'ordre $d = \sharp A$, où m_{ij} est le nombre de lettres j apparaissant dans le mot $\xi(i)$ pour $i, j \in A$. Vérifier que $M(\xi^n) = M(\xi)^n$ pour tout entier $n > 0$.

(2) Dans cette question on suppose $M(\xi)$ primitive.

(a) Montrer que la première lettre u_0 de $u = (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ apparait dans u avec des sauts bornés, i.e. il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ avec } |m - n| < M \text{ et } u_m = u_0.$$

(b) Soit $w \in \mathcal{L}(u)$ un sous-mot de u. Montrer qu'il existe un entier $k > 0$ tel que w soit un sous-mot de $\xi^k(u_0)$.

(c) Conclure que $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ est minimal.

(3) Réciproquement montrer que $M(\xi)$ est primitive lorsque $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ est minimal.

3.3 Entropie nulle.

Dans cette dernière partie on assume de plus que $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ est minimal.

(1) Pour tout $a \in A$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\xi^p(a)$ en fonction de $M(\xi)$. Déduire alors du théorème de Perron-Froebenius l'existence de $\lambda > 1$ tel que

$$\forall a \in A\ \exists c_a > 0\ |\xi^p(a)| \sim^p c_a \lambda^p.$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier $p_n > 0$ tel que [1]

$$\inf_{a \in A} |\xi^{p_n - 1}(a)| \leq n \leq \inf_{a \in A} |\xi^{p_n}(a)|.$$

(3) Soit $w \in \mathcal{L}_n(u)$ un sous-mot de u de longueur n. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}_2(u)$ tel que w est un sous-mot de $\xi^{p_n}(v)$.

(4) En déduire que

$$\sharp \mathcal{L}_n\left(\overline{\mathcal{O}(u)}\right) \leq \sharp A^2 \times \sup_{a \in A} |\xi^{p_n}(a)|.$$

(5) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n > 0$

$$\sharp \mathcal{L}_n\left(\overline{\mathcal{O}(u)}\right) \leq Cn.$$

Conclure que $(\overline{\mathcal{O}(u)}, \sigma)$ est d'entropie topologique nulle.

1. Par convention $|\xi^0(a)| = 0$ pour tout $a \in A$.