CONTRÔLE MAT551 - 2018 - DURÉE 3H

Notation : Pour une partition Q d'un ensemble X, on note $Q(x)$ l'élément de Q contenant $x \in X$.

1 Exemples

1) Donner sans aucune justification un exemple de système dynamique
- probabiliste ergodique mais pas mélangeant,
- topologique transitif mais pas minimal.

2 Odomètre

Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que p_k divise p_{k+1} pour tout k. On munit le produit $\prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ de la topologie produit (chaque facteur $\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ étant muni de la topologie discrète). On considère le sous-ensemble fermé X du compact métrisable $\prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ donné par les suites $(a_k)_k$ satisfaisant $a_k = a_{k+1} \pmod{p_k}$ pour tout k et l'application continue $f : X \to X$ qui à $(a_k)_k \in X$ associe $(a_k + 1)_k$.

2) Montrer que pour tout $x \in X$ et pour tout $(a_0, \cdots, a_l) \in \prod_{0\leq k\leq l} \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ avec $a_k = a_{k+1} \pmod{p_k}$ pour $0 \leq k < l$, il existe un entier $n > 0$ tel que les $(l+1)$-premières coordonnées de $f^n(x)$ soient données par $(a_0, \cdots, a_l)$. En déduire que (X, f) est minimal.

3) Montrer que la probabilité uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'unique probabilité borélienne invariante pour le système topologique donné par la translation $x \mapsto x+1$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (toujours muni de la topologie discrète).

4) Pour tout $l \in \mathbb{N}$ on note $\pi_l : X \to \mathbb{Z}/p_l\mathbb{Z}$, l'application $(a_k)_k \mapsto a_l$. Identifier pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$ la mesure $\pi_l^*\mu$. En déduire que (X, f) est uniquement ergodique.

5) Montrer que l'unique probabilité borélienne f-invariante ν n'est pas mélangeante.

6) Montrer que l'entropie de ν est nulle. En déduire l'entropie topologique de (X, f).

7) Soient (X_2, f_2) et (X_3, f_3) les odomètres respectivement associés aux suites $(2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(3^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer que la fonction continue $\psi : X_2 \to \{-1, 1\}$, définie par $\psi((a_k)_k) = (-1)^{a_1}$, satisfait $\psi \circ f_2 = -\psi$ et que pour toute fonction continue $\phi : X_3 \to \mathbb{R}$ la suite $(\phi \circ (f_3)^{3^n})_n$ converge simplement -*pointwisely*- vers ϕ. Les systèmes (X_2, f_2) et (X_3, f_3) sont-ils topologiquement conjugués ?

3 Théorème de Loch

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $D^n(x)$ (respectivement $P^n(x)$) l'ensemble des réels de $[0, 1]$ dont le développement décimal, i.e. en base 10, (respectivement le développement en fraction continue) coïncide avec celui de x jusqu'à l'ordre n. On note $m(x, n)$ le plus grand entier M avec $D^n(x) \subset P^M(x)$. Autrement dit tout nombre ayant le même développement décimal que x jusqu'à l'ordre n a le même développement en fraction continue que x jusqu'à l'ordre $m(x, n)$.

Théorème (Loch 1964)**.** *Pour Lebesgue presque tout point $x \in [0, 1]$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m(x, n)}{n} = \frac{6 \log 2 \log 10}{\pi^2}.$$

Nous avons étudié à plusieurs reprises le système de Gauss $([0, 1], G)$ défini par $G(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ pour $x \in]0, 1]$ et $G(0) = 0$. On note $P = \{]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}],\ p \in \mathbb{N}^*\}$ la partition en branches monotones de G sur $]0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $P^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} G^{-k}P$. On choisit par convention $P^0 = \{[0, 1]\}$. On admettra les résultats suivants :

- la mesure de Gauss $\mu_G = \frac{dx}{(1+x)\log 2}$ est une mesure de probabilité G-invariante ergodique sur $[0, 1]$ d'entropie

$$h(\mu_G) = \frac{\pi^2}{6 \log 2},$$

— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in P^n$, la restriction de G^n à A est un difféomorphisme sur $G^n(A) \supset]0,1[$ et
$$\forall x, y \in A, \qquad \frac{|(G^n)'(x)|}{|(G^n)'(y)|} \leq 100.$$

8) Vérifier que pour $A \in P^n$, la partition induite par P^{n+1} sur l'intervalle A est donnée par une infinité d'intervalles disjoints s'accumulant sur l'extrémité droite ou gauche de A suivant la parité de n.

9) Soit $I \subset [0,1]$ un intervalle ouvert. On note m_I le plus grand entier $M \geq 0$ tel qu'il existe $A \in P^M$ avec $I \subset A$. Deux intervalles disjoints sont dits adjacents lorsque leur union est aussi un intervalle. Montrer à l'aide de la question précédente, que pour tout $x \in I \setminus \mathbb{Q}$ il existe $B \in P^{m_I+r}$ adjacent à $P^{m_I+r}(x)$ avec $B \subset I$ et $0 < r \leq 3$. <u>Indications</u> *:* Remarquer qu'une des extrémités de $P^{m_I+1}(x)$ appartient à I.

10) Montrer que si deux éléments A et B de P^{n+1} sont adjacents, alors il existe $C \in P^n$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $|p-q| = 1$ tels que $A = C \cap G^{-n}\left(\left]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right]\right)$ et $B = C \cap G^{-n}\left(\left]\frac{1}{q+1}, \frac{1}{q}\right]\right)$.

11) En déduire que $\frac{Leb(A)}{Leb(B)} \leq 300$ pour deux éléments adjacents A et B de P^{n+1}, où Leb désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

12) Montrer que pour tout $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{Leb(P^{m(x,n)+3}(x))}{300} \leq Leb(D^n(x)) \leq Leb(P^{m(x,n)}(x)).$$

13) En déduire le Théorème de Loch à l'aide de la formule de Shanon-McMilman-Breiman.

4 Automates cellulaires linéaires

Soit $p > 1$ un nombre premier. On considère le produit $X = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ (muni de la topologie produit des topologies discrètes). Soit $(c_i)_{i \in I} \in ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*)^I$ avec I un ensemble fini de $\mathbb{Z}$. A tout $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$ on associe la suite $f(a)$ définie par $f(a)_n = \sum_{i \in I} c_i a_{n+i}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on notera
$$n \cdot I := \underbrace{I + \cdots + I}_{n \text{ fois}} = \{i_1 + \cdots i_n,\ (i_1, \cdots, i_n) \in I^n\} \text{ avec } 0 \cdot I = \emptyset \text{ par convention.}$$

Pour tout $J \subset \mathbb{Z}$ on définit la partition en ouvert-fermés $P_J := \left\{[b],\ b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^J\right\}$, où $[b]$ désigne le cylindre $[b] := \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X,\ a_m = b_m \text{ pour } m \in J\}$ pour $b = (b_j)_{j \in J}$. On définit la longueur $|J|$ d'un sous-ensemble fini J de $\mathbb{Z}$ comme $|J| = \max J - \min J$. Enfin on appelle segment d'entiers tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ donné par une suite finie d'entiers consécutifs.

14) Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in X$, montrer que $(f^n(a))_q$ ne dépend que de a_k pour $k \in q + n \cdot I$.

15) En déduire que pour tout $J \subset \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ la partition P_{J^n} est plus fine que $\bigvee_{m=0}^{n} f^{-m} P_J$ avec $J^n := \bigcup_{m=0}^{n} (J + m \cdot I)$.

16) On suppose dans la suite du problème que J est un segment d'entiers de longueur $|J| > \max(-\min I, \max I, |I|)$. Montrer que $J + n \cdot I$ puis J^n est un segment d'entiers pour tout $n \in \mathbb{N}$. <u>Indications</u> *:* Montrer tout d'abord que $J + I$ est un segment d'entiers et que $J \cap (J + I) \neq \emptyset$.

17) Soit $a \in X$ avec $a_j = (f(a))_j = 0$ pour tout $j \in J$. Montrer que $a_m = 0$ pour tout $m \in J + I$. <u>Indications</u> *:* On pourra considérer le plus grand intervalle K contenant J avec $a_k = 0$ pour $k \in K$ et montrer que $I + J \subset K$.

18) On note 0 la suite nulle de X. Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$P_{J^n}(0) = \left(\bigvee_{m=0}^{n} f^{-m} P_J\right)(0).$$
<u>Indications</u> *:* Raisonner par récurrence en appliquant la question précédente à J^n au lieu de J.

19) En utilisant la linéarité de f montrer que $P_{J^n} = \bigvee_{m=0}^{n} f^{-m} P_J$.

20) Exprimer $h_{top}(f, P_J)$, puis $h_{top}(f)$ en fonction de I et p.