CONTROLE MAT551 - 2019 - DURÉE 3H

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.
La qualité de la rédaction sera un facteur important de l'appréciation des copies.

1 Une dynamique produit

On considère l'homéomorphisme f du tore $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{T}^3,\ f(x,y,z) = \left(x+\sqrt{2}, 2y+z, y+z\right)$$

1) Est-ce que $(\mathbb{T}^3, f)$ est uniquement ergodique ? minimal ?

2) Montrer que la mesure de Lebesgue de $\mathbb{T}^3$, notée Leb, est f-invariante ergodique. Indications : Pour $\phi \in L^2(Leb)$ on écrira les coefficients de Fourier de $\phi \circ f$ en fonction de ceux de ϕ.

3) En déduire que f est topologiquement transitif.

4) Déterminer l'entropie topologique de f et montrer que $h(Leb) = h_{top}(f)$.

2 Théorème de Livsic pour les sous-décalages

Pour un système topologique donné par une application continue $T : X \to X$ sur un espace métrique compact (X,d), une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ est un cobord s'il existe une fonction $\psi : X \to \mathbb{R}$ continue satisfaisant $\phi = \psi \circ T - \psi$. La fonction ψ est appelée la fonction de transfert associée à ϕ. Une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ est dite Hölder d'exposant $\alpha \in]0,1]$, lorsqu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x,y \in X,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leq C d(x,y)^\alpha.$$

Enfin pour $n \in \mathbb{N}$ on notera d_n la distance n-dynamique et $S_n\phi$ la n^{eme} somme de Birkhof de ϕ :

$$\forall x,y \in X,\ d_n(x,y) = \max\left\{d(f^k x, f^k y),\ k = 0, \cdots, n-1\right\}$$

$$\forall x \in X,\ S_n\phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x).$$

2.1 Cas des sous-décalages de type fini.

On considère dans cette première partie le sous-décalage de type fini (Y_A, σ) associé à une matrice d'adjacence irréductible $A \in M_K(\{0,1\})$. L'ensemble $Y_A \subset \{1, \cdots, K\}^{\mathbb{Z}}$ est muni de la distance

$$\forall x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in Y_A,\ d(x,y) = 2^{-\min\{|k|,\ x_k \neq y_k\}}.$$

Nous proposons de montrer le théorème de Livsic dans ce cadre :

Théorème (Livsic). *Soit $\phi : Y_A \to \mathbb{R}$ une fonction Hölder. Alors ϕ est un cobord si et seulement si $\sum_{x \in \mathcal{O}} \phi(x) = 0$ pour tout orbite périodique $\mathcal{O}$ de (Y_A, σ). Dans ce cas la fonction de transfert ψ associée à ϕ est unique à constante près et ψ est Hölder de même exposant que ϕ.*

5) Montrer que si ϕ est un cobord et $\mathcal{O}$ une orbite périodique alors $\sum_{x \in \mathcal{O}} \phi(x) = 0$.

6) Soit $\phi : Y_A \to \mathbb{R}$ une fonction Hölder d'exposant $\alpha \in]0,1]$. Montrer qu'il existe $D > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in Y_A$

$$|S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| \leq D\,(d_n(x,y))^\alpha.$$

7) Montrer que pour tout $(y,n) \in Y_A \times \mathbb{N}^*$ avec $d(y, \sigma^n y) < 1/2$ il existe $x \in Y_A$ avec $\sigma^n x = x$ et $d_n(x,y) \leq 2d(\sigma^n y, y)$.

8) Montrer que si ϕ est un cobord avec ψ pour fonction de transfert, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n\phi = \psi \circ \sigma^n - \psi.$$

9) Soit $\phi : Y_A \to \mathbb{R}$ une fonction Hölder avec $\sum_{x \in \mathcal{O}} \phi(x) = 0$ pour tout orbite périodique $\mathcal{O}$ de (Y_A, σ). On fixe $y \in Y_A$. Montrer que la fonction ψ définie sur $\mathcal{O}_y := \{\sigma^n y,\ n \in \mathbb{N}\}$ par $\psi(y) = 0$ et $\psi \circ \sigma^n(y) = S_n\phi(y)$ pour $n > 0$, se prolonge en une application Hölder de même exposant que ϕ sur la fermeture $\overline{\mathcal{O}_y}$ de $\mathcal{O}_y$. Indications : Pour $\sigma^p y, \sigma^q y \in \mathcal{O}_y$ avec $n = q - p > 0$ on pourra appliquer la question 7) à $(\sigma^p y, n) \in Y_A \times \mathbb{N}^*$.

10) En déduire que ϕ est un cobord.

11) Montrer que si ψ et ψ' sont deux fonctions de transfert associées à ϕ alors $\psi - \psi'$ est constante.

2.2 Contre-exemple sofique. On considère l'ensemble $Y = Y(K)$ avec $K > 4$ des suites $w = (w_n)_n \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que

$$\forall m < n \in \mathbb{Z}, \quad \left| \sum_{m \leq k \leq n} w_k \right| < K.$$

On munit Y du décalage $\sigma((w_n)_n) = (w_{n+1})_n$. Soit $A \in M_K(\{0,1\})$ la matrice d'adjacence définie par $A_{i,j} = |i-j|$ si $|i-j| = 1$ et $A_{i,j} = 0$ sinon. On note (Y_A, σ_A) le sous-décalage de type fini associé.

12) Montrer que l'application $\pi : (Y_A, \sigma_A) \to (Y, \sigma)$ définie par $\pi((u_n)_n) = (u_{n+1} - u_n)_n$ est une extension topologique.

13) On note ϕ la fonction de Y dans $\mathbb{R}$ qui à une suite $(w_n)_n$ de Y associe son premier terme w_0. Montrer que $\sum_{x \in \mathcal{O}} \phi(x) = 0$ pour tout orbite périodique $\mathcal{O}$ de (Y, σ).

14) On suppose que ϕ est un cobord de fonction de transfert continue ψ.

- **i)** Montrer qu'il existe une constante $E \in \mathbb{R}$ telle que $\forall (u_n)_n \in Y_A,\ \psi \circ \pi((u_n)_n) = u_0 + E$. <u>*Indications :*</u> Considérer le cobord $\phi \circ \pi$ de (Y_A, σ_A).
- **ii)** En déduire que pour tout $w \in Y$ il existe $\alpha_0 \in \{1, \cdots, K\}$ tel que $u_0 = \alpha_0$ pour tout $(u_n)_n \in \pi^{-1}(w)$.
- **iii)** Soit $w \in Y(K-1) \subset Y(K)$. Montrer qu'il existe $(u_n)_n, (v_n)_n \in \pi^{-1}(w)$ avec $u_0 \neq v_0$.

15) Conclure que le théorème de Livsic ne s'applique pas à (Y, σ).

3 Fer à cheval sur l'intervalle

3.1 Entropie d'un fer à cheval. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. On suppose que pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$, l'application f^m admet une famille $\mathcal{I} = \{I_1, \cdots, I_p\}$ de sous-intervalles fermés de $[0,1]$ deux à deux disjoints satisfaisant $I_l \subset f^m(I_k)$ pour tout l, k. Une telle famille est appelée un p-fer-à-cheval de f^m. On note $I := \bigcup_k I_k$ et $C_{\mathcal{I}} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-nm} I$. Soit $\pi : C_{\mathcal{I}} \to \{1, \cdots, p\}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in C_{\mathcal{I}}\, \forall n \in \mathbb{N},\ [(\pi(x))_n = k] \Leftrightarrow [f^{nm}(x) \in I_k].$$

16) Montrer que $\pi : (C_{\mathcal{I}}, f^m) \to (\{1, \cdots, p\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ définit une extension topologique.

17) En déduire que $h_{top}(f) \geq \frac{\log p}{m}$.

3.2 Caractérisation de l'entropie. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue avec $h_{top}(f) > \lambda > \log 3$.

18) Montrer qu'il existe une partition finie P de $[0,1]$ en intervalles telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp P^n > \lambda \text{ avec } P^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} P \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

19) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'entiers naturels non nuls. Montrer que

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \max \left(\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log (a_n), \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log(b_n) \right).$$

20) Pour tout $A \in P$ et $n \in \mathbb{N}$ on note P_A^n la partition de A induite par P^n, i.e. formée des éléments $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i \neq \emptyset$ avec $A_0 = A$ et $A_i \in P$ pour $i = 0, \cdots, n-1$. On considère le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de P constitué des $A \in P$ satisfaisant $\limsup_n \frac{1}{n} \log \sharp P_A^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp P^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{F}$ on note $\mathcal{F}_A^n$ le sous-ensemble de P_A^n formé des éléments $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i \neq \emptyset$ avec $A_0 = A$ et $A_i \in \mathcal{F}$ pour $i = 0, \cdots, n-1$. Montrer à l'aide de la question précédente que

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp P_A^n = \limsup_{n} \frac{1}{n} \log \sharp \mathcal{F}_A^n.$$

21) Pour tout $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i \in P^n$ montrer qu'il existe un sous-intervalle $J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}$ de A_0 tel que $f^{n-1}\left(J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}\right) = f^{n-1}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i\right)$. <u>*Indications :*</u> Commencer par $n = 2$...

22) Pour tout $A, B \in \mathcal{F}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c(A, B, n) = \sharp \left\{ \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} A_i \in \mathcal{F}_A^n,\ B \subset f^n\left(J_{A_0, \cdots, A_{n-1}}\right) \right\}$. Montrer que $\sum_{B \in \mathcal{F}} c(A, B, n) \geq \sharp \mathcal{F}_A^{n+1} - 2 \sharp \mathcal{F}_A^n$.

23) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$ il existe une infinité d'entiers n avec $\sharp \mathcal{F}_A^n \geq 3 \sharp \mathcal{F}_A^{n-1}$ et $\frac{\log \sharp \mathcal{F}_A^n}{n} > \lambda$. En déduire qu'il existe $\phi(A) \in \mathcal{F}$ tel que $\limsup_n \frac{1}{n} \log c(A, \phi(A), n) > \lambda$.

24) En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $c(A, A, n) > 2\lambda^n$. <u>*Indications :*</u> On pourra vérifier que $c(A, C, n+m) \geq c(A, B, n) \times c(B, C, m)$ pour $A, B, C \in \mathcal{F}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$.

25) Conclure que f^n admet un p-fer à cheval avec $\frac{\log p}{n} > \lambda$.