CONTROLE MAT551 - 2020 - DURÉE 3H

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir une très bonne note...

1 Etats d'équilibre à température 0

Soit (X,T) un système topologique et $\phi : X \to \mathbb{R}$ une observable continue. Un état d'équilibre de ϕ est une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ satisfaisant

$$h(\mu) + \int \phi \, d\mu = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(X,T)} \left(h(\nu) + \int \phi \, d\nu \right).$$

(1) Montrer que si (X,T) est un sous-décalage, alors il existe un état d'équilibre de ϕ.

On suppose dans la suite que (X,T) est un sous-décalage de type fini (Σ_A, σ) associé à une matrice d'adjacence irréductible $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_d(\{0,1\})$ et qu'il existe $\Phi : \{1, \cdots, d\}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) = \Phi(x_0, x_1)$ pour tout $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_A$. On rappelle que les mesures périodiques sont denses dans $\mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)$.

On note P la partition [1] en coordonnée 0 et pour $B^n = \bigcap_{k=0}^{n-1} \sigma^{-k}[i_k] \in P^n$ avec $(i_k)_{k=0,\cdots,n-1} \in \{1, \cdots, d\}^n$ et $n \geq 2$ un entier, on pose $\phi(B^n) = \sum_{k=0}^{n-2} \Phi(i_k, i_{k+1})$.

Dans les deux questions suivantes on fixe une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)$ et un entier $n \geq 2$.

(2) Montrer que $\sum_{B^n \in P^n} \mu(B^n)\phi(B^n) = (n-1) \int \phi \, d\mu$.

(3) En utilisant la concavité de $x \mapsto -x \log x$, montrer que $H_\mu(P^n) + (n-1) \int \phi d\mu \leq \log \left(\sum_{B^n \in P^n} e^{\phi(B^n)} \right)$.

On pose $A_\phi = (e^{\Phi(i,j)} a_{i,j})_{i,j}$ et on note $\rho(A_\phi)$ le rayon spectral de A_ϕ.

(4) Montrer que $\limsup_n \frac{1}{n} \log \left(\sum_{B \in P^n} e^{\phi(B^n)} \right) \leq \log \rho(A_\phi)$.

(5) En déduire que $\max_{\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)} \left(h(\mu) + \int \phi \, d\mu \right) \leq \log \rho(A_\phi)$.

On considère $u = (u_j)_j$ et $v = (v_i)_i$ des vecteurs propres positifs à gauche et à droite de A_ϕ associés à la valeur propre $\rho(A_\phi)$, i.e. $uA_\phi = \rho(A_\phi)u$ et $A_\phi v = \rho(A_\phi)v$, satisfaisant $\sum_i u_i v_i = 1$. On note π le vecteur ligne de probabilité $\pi = (u_i v_i)_i$ et Q la matrice carrée d'ordre d donnée par $Q = \left(\frac{e^{\Phi_{i,j}} a_{i,j} v_j}{\rho(A_\phi) v_i} \right)_{i,j}$.

(6) Vérifier que Q est une matrice stochastique et que π est Q-stationnaire.

(7) Montrer que la mesure de Markov associée à π et Q, notée μ_ϕ, est un état d'équilibre de ϕ.

Soit $\alpha(\phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)} \int \phi \, d\mu$. On note $\mu_x = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta_{\sigma^k x}$ la mesure périodique associée à un point périodique x de période M de (Σ_A, σ).

Un point périodique y de (Σ_A, σ) est dit **premier** lorsqu'il s'écrit comme la concaténation inifinie w^∞ d'un mot $w = w_1 \cdots w_N$ avec $w_p \neq w_q$ pour $p \neq q \in [\![1, N]\!]$ (en particulier y est de période $N \leq d$).

(8) Montrer que pour tout point périodique x de (Σ_A, σ) de période M, il existe des points périodiques premiers $y^1, \cdots, y^K$ de période respective $N_1, \cdots, N_K$ avec $\sum_{l=1}^K N_l = M$ tels que $M \int \phi \, d\mu_x = \sum_{l=1}^K N_l \int \phi \, d\mu_{y^l}$ et $\{x_i x_{i+1} \ : \ i \in [\![1, M]\!]\} = \{y_i^l y_{i+1}^l \ : \ i \in [\![1, N_l]\!], \, l = 1, \cdots, K\}$. Indications : On pourra raisonner par récurrence sur M.

(9) En déduire que $\alpha(\phi) = \sup \left\{ \int \phi \, d\mu_y, \ y \text{ périodique premier de } (\Sigma_A, \sigma) \right\}$.

On note $\Sigma_{\tilde{A}} \subset \Sigma_A$ le sous-décalage de type fini donné par la matrice d'adjacence $\tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j})_{i,j} \in M_d(\{0,1\})$ définie par $\tilde{a}_{i,j} = 1$ ssi il existe $i, j \in \{i, \cdots, d\}$ et $x = (x_n)_n$ un point périodique premier de (Σ_A, σ) avec $x_0 = i$ et $x_1 = j$ et $\int \phi \, d\mu_x = \alpha(\phi)$.

1. Pour rappel P est la partition en cylindres $[i] := \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_A, \ x_0 = i\}$ pour $i \in \{1, \cdots, d\}$.

(10) Soit $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)$ ergodique. On suppose qu'il existe i, j satisfaisant $\tilde{a}_{i,j} = 0$ et $\mu([ij]) > 0$ (avec $[ij] = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_A,\ x_0 = i \text{ et } x_1 = j\}$). Montrer que $\int \phi \, d\mu < \alpha(\phi)$. Indications : On pourra considérer un point générique pour μ et utiliser la question 8.

(11) En déduire que pour $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)$, on a

$$\left[\int \phi \, d\mu = \alpha(\phi)\right] \Rightarrow \left[\mu(\Sigma_{\tilde{A}}) = 1\right].$$

(12) Soit x un point périodique de $(\Sigma_{\tilde{A}}, \sigma)$ de période M. Soit $y^1, \cdots y^M$ des points périodiques premiers de période respective $N_1, \cdots, N_M$ tels que $y_0^l y_1^l = x_l x_{l+1}$ et $\int \phi \, d\mu_{y^l} = \alpha(\phi)$ pour $l = 1, \cdots, M$. On note $Y^1, \cdots, Y^M$ les chemins fermés correspondant à $y^1, \cdots, y^M$ dans le graphe $\mathcal{G}_A$. En considérant le chemin fermé obtenu en recollant pour $l = 1, \cdots, M$ les arrêtes de Y_l excepté $\{y_0^l y_1^l\}$, montrez que $\int \phi \, d\mu_x = \alpha(\phi)$.

(13) En déduire que pour $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A, \sigma)$, on a

$$\left[\int \phi \, d\mu = \alpha(\phi)\right] \Leftarrow \left[\mu(\Sigma_{\tilde{A}}) = 1\right].$$

(14) Montrer que tout point d'accumulation de $(\mu_{\beta\phi})_{\beta\in\mathbb{R}^+}$ quand β tends vers $+\infty$ est une mesure supportée par $\Sigma_{\tilde{A}}$. Vérifier ensuite qu'une telle mesure est d'entropie maximale pour $(\Sigma_{\tilde{A}}, \sigma)$.

(15) On considère le décalage complet sur $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$ et l'application Φ définie par $\Phi_{1,1} = \Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} = -1$ et $\Phi_{i,j} = -2$ pour les autres paires (i, j). Montrer que $\mu_{\beta\phi}$ converge quand β tends vers $+\infty$ et déterminer sa limite.

2 β-DÉCALAGE

Pour un réel $x > 0$, on note $[x] = \sup\{k \in \mathbb{N},\ k < x\}$ et $[0] = 0$. On considère l'application discontinue de l'intervalle $[0, 1]$ définie par $T_\beta(x) = \beta x - [\beta x]$ pour $\beta > 1$. Pour tout $x \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$ on pose $a_k(x) = [\beta T_\beta^k(x)]$ avec pour convention T_β^0 l'identité sur $[0, 1]$.

(16) Vérifiez que $x = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_{k-1}(x)\beta^{-k}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

On considère

$$X_\beta := \overline{\{(a_k(x))_{k\in\mathbb{N}},\ x \in [0, 1]\}} \subset \{1, \cdots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}.$$

(17) Montrer que X_β définit un sous-décalage.

Pour simplifier les notations, on écrit $(c_k)_k = (a_k(1))_k$. On note $\prec$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, i.e. $(b_k)_k \prec (d_k)_k$ lorsqu'il existe l tel que $b_k = d_k$ pour $0 \le k < l$ et $b_l < d_l$.

(18) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $(a_k(x))_k \preceq c_k$.

(19) Montrer que $X_\beta = \overline{\{(b_k)_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (b_{k+n})_k \preceq (c_k)_k\}}$.

On considère S l'ensemble des mots de la forme $c_0 \cdots c_{N-1} d_N$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $0 \le d_N < c_N$ (pour $N = 0$ ce sont juste les mots d_0 de longueur 1 donné par $0 \le d_0 < c_0$) et S^* l'ensemble des éléments de $\{1, \cdots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}$ données par des concaténations inifinies de mots de S.

(20) Vérifiez que $\overline{S^*} = X_\beta$.

(21) Vérifiez que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a avec $\mathcal{L}_n(X_\beta)$ l'ensemble[2] des n-mots de X_β pour $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + \sum_{k=1}^{N} c_{k-1} \sharp\mathcal{L}_{N-k}(X_\beta) = \sharp\mathcal{L}_N(X_\beta).$$

On pose f et g les séries entières données respectivement par $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_{n-1}x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sharp\mathcal{L}_n(X_\beta)x^n$.

(22) Montrer que les rayons de convergence de ces séries sont non nuls, puis qu' au voisinage de 0 on a $g(x)(1 - f(x)) = \frac{1}{1-x}$.

(23) En déduire l'entropie topologique de (X_β, σ).

2. Par convention $\mathcal{L}_0(X_\beta)$ est formé du mot vide et est donc de cardinal 1.