CONTROLE MAT551 - 2021 - DURÉE 3H

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir une très bonne note...

1 Homéomorphisme expansif en dimension 1

Un homéomorphisme $T : X \circlearrowright$ *d'un espace métrique compact* (X, d) *est dit expansif s'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que pour tout* $x, y \in X$

$$[d(T^n x, T^n y) < \epsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow [x = y].$$

(1) Montrer que si T expansif alors T^k l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(2) Montrer que si (X, T) et (Y, S) sont deux systèmes topologiques conjugués avec (X, T) expansif alors (Y, S) l'est aussi.

(3) Montrer que si U est un ensemble infini tel que $\mathrm{diam}(T^n U) \xrightarrow{|n| \to +\infty} 0$ alors (X, T) n'est pas expansif.

Soit f *un homéomorphisme de l'intervalle* $[0, 1]$.

(4) On suppose f croissant. Soient $a < b \in [0, 1]$ avec $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(y) \neq y$ pour tout $y \in]a, b[$. Montrer que tout intervalle $U = [c, d] \subset]a, b[$ vérifie l'hypothèse de la question précéndente.

(5) En déduire que tout homéomorphisme de l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas expansif.

Soit f *un homéomorphisme du cercle* $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(6) Montrer que si f admet un point périodique, alors f n'est pas expansif.

(7) A l'aide du cours rappeler succintement pourquoi un homéomorphisme f du cercle apériodique préservant l'orientation qui ne possède pas d'ouvert U, tels que les ensembles $f^n U$, $n \in \mathbb{Z}$, soient deux à deux disjoints, est topologiquement conjugué à une rotation d'angle irrationnel.

(8) Conclure qu'un homéomorphisme du cercle n'est jamais expansif.

2 Un calcul d'entropie

On note σ le décalage sur un ensemble de suites donné. On considère une mesure ergodique $\mu \in \mathcal{M}(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ et la mesure de Bernoulli $\nu = (1/2, 1/2)^{\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}(\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ (qui correspond à un pile ou face équilibré sur $\{1, 2\}$). Enfin on pose

$$\begin{aligned} \pi : &\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \times \{1, 2\}^{\mathbb{Z}} \to \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}, \\ &((x_n)_n, (y_n)_n) \mapsto (x_n \times y_n)_n. \end{aligned}$$

(9) Rappeler rapidement pourquoi la mesure $\xi := \pi^*(\mu \times \nu)$ est invariante par le décalage sur $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$.

On considère les partitions en coordonnée zéro P *et* Q *respectives de* $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ *et* $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. *Aussi on note* $\psi : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$ *l'application définie par* $\psi(0) = 0$ *et* $\psi(1) = \psi(2) = 1$ *et* $\Psi : \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ *l'application induite* $\Psi((x_n)_n) = (\psi(x_n))_n$.

(10) Montrer que pour tout $z = (z_k)_k \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\xi(P^n(z)) = 2^{-\sharp\{0 \leq k < n, \ \psi(z_k) = 1\}} \mu(Q^n(\Psi(z))),$$

où $P^n(z)$ et $Q^n(\Psi(z))$ désigne les éléments des partitions itérées P^n et Q^n contenant z et $\Psi(z)$.

(11) Vérifier que $\Psi^*\xi = \mu$. En déduire[1] que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H_\xi(P^n) = H_\mu(P^n) + \log 2 \int \sharp\{0 \leq k < n,\ \sigma^k x \in [1]\}\, d\mu(x).$$

(12) Conclure que $h(\xi) = h(\mu) + \mu([1]) \log 2$.

3 Un théorème de Wiener-Witner

Soit $T : X \circlearrowleft$ un homéomorphisme d'un espace métrique compact X et soit $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. On considère $f \in L^1(\mu)$. Soit $(\mathbb{T}, R_\theta)$ la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \theta$, sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et soit $\nu_\theta \in \mathcal{M}(\mathbb{T}, R_\theta)$.

(13) Montrer à l'aide du théorème ergodique ponctuel que pour tout θ il existe un sous-ensemble borélien F_θ de $X \times \mathbb{T}$ avec $(\mu \times \nu_\theta)(F_\theta) = 1$, tel que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} e^{2i\pi(y+k\theta)} f(T^k x)\right)_n$ converge pour tout $(x, y) \in F_\theta$.

(14) En déduire avec le théorème de Fubini, que pour tout θ il existe un sous-ensemble borélien E_θ de X avec $\mu(E_\theta) = 1$ tel que pour tout $x \in E_\theta$, la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} e^{2i\pi k\theta} f(T^k x)\right)_n$ converge.

(15) Rappeler sans démonstration la limite $\nu_{y,\theta}$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{T}, R_\theta)$ muni de la topologie faible-$*$ de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} \delta_{R_\theta^k y}\right)_n$ pour tout $y \in \mathbb{T}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

*On suppose désormais μ **mélangeante**. On fixe θ et $\nu_\theta \in \mathcal{M}(\mathbb{T}, R_\theta)$. On considère une mesure $\lambda \in \mathcal{M}(X \times \mathbb{T}, T \times R_\theta)$ vérifiant $\pi_X^*\lambda = \mu$ et $\pi_\mathbb{T}^*\lambda = \nu_\theta$, où $\pi_X : X \times \mathbb{T} \to X$ et $\pi_\mathbb{T} : X \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ désignent respectivement les projections sur le premier et second facteur.*

On note p la projection orthogonale sur $L^2(\mu)$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\lambda)$, où l'on a identifié $L^2(\mu)$ au sous espace fermé de $L^2(\lambda)$:

$$L^2(\mu) := \{G \in L^2(\lambda),\ \exists g \in L^2(\mu)\ G(x,y) = g(x) \ \text{ pour } \lambda \text{ p.t. } (x,y)\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$\begin{aligned} e_n :& X \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \\ & (x, y) \mapsto e^{2i\pi ny}. \end{aligned}$$

(16) Montrer que $p(e_n)$ est un vecteur propre de l'opérateur de Koopman $U_T : L^2(\mu) \circlearrowleft$. En déduire que $p(e_n) = 0$ pour tout $n \neq 0$.

(17) Montrer que pour tout $(g, h) \in L^2(\mu) \times L^2(\nu_\theta)$ on a $\int g(x)h(y)\, d\lambda(x,y) = \int g\, d\mu \times \int h\, d\nu_\theta$. Conclure que $\lambda = \mu \times \nu_\theta$.

(18) Montrer qu' il existe un ensemble borélien E de X avec $\mu(E) = 1$ tel que

$$\forall x \in E\ \forall y \in \mathbb{T}\ \forall \theta,\ \frac{1}{n} \sum_{0\leq k<n} \delta_{(T^k x, R_\theta^k y)} \xrightarrow{n} \mu \times \nu_{y,\theta}$$

pour la topologie faible étoile sur $\mathcal{M}(X \times \mathbb{T})$.

(19) En déduire que pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue, il existe un ensemble borélien E avec $\mu(E) = 1$ tel que :

$$\forall x \in E\ \forall \theta \notin \mathbb{Z},\ \frac{1}{n} \sum_{0\leq k<n} e^{2i\pi k\theta} f(T^k x) \xrightarrow{k} 0.$$

(20) Même question que la précédente pour $f \in L^1(\mu)$.

(21) <u>Question Bonus :</u> Identifier la limite à la question (14).

1. On rappelle que [1] désigne l'élément de Q donné par le cylindre $[1] = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^\mathbb{Z},\ x_0 = 1\}$.