Contrôle
Durée 3h

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir une très bonne note...

Exercice 1. *Développement en base* 10.
Dans le développement[1] en base 10 de $[0,1) \ni x = 0, a_1 a_2 \cdots$, quelle est la fréquence asympotique des 1, i.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sharp\{1\leqslant k\leqslant n,\ a_k=1\}}{n}$, pour Lebesgue presque tout point x de $[0,1]$. Justifiez très rapidement.

Exercice 2. *Mesures ergodiques.*
On note $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ le tore de dimension 2. Décrire l'ensemble des mesures ergodiques de $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{T}^2$.

Exercice 3. *Sous-décalage en or.*
Soit $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites n'ayant pas deux 0 consécutifs. Calculer l'entropie du décalage sur X.

Problème 1. *Mesure absolument continue et mesure d'entropie maximale.*
On considère l'application $T_a : [0,1] \to [0,1]$ pour $a \in]0,1[$ fixé définie par

$$\begin{aligned} T_a(x) &= \tfrac{x}{a} \text{ pour } x \in [0,a[, \\ &= \tfrac{1-x}{1-a} \text{ pour } x \in [a,1]. \end{aligned}$$

On note Leb la mesure de Lebesgue sur l'intervalle et α la partition $\alpha := \{[0,a[, [a,1]\}$ de l'intervalle. Dans la suite α^n, $n \in \mathbb{N}^*$, désigne la partition itérée $\alpha^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} T_a^{-k}\alpha$. On notera α_x^n l'élément de α^n contenant $x \in [0,1]$. On rappelle que Leb est invariante et mélangante pour T_a (voir devoir maison).

1. développement décimal usuel

1. Montrer que $\mathrm{Leb}(\alpha_x^n) = \frac{1}{|(T_a^n)'(x)|}$ pour Lebesgue presque tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer l'entropie $h_{T_a}(\mathrm{Leb}, \alpha)$, puis $h_{T_a}(\mathrm{Leb})$.
3. Montrer $h_{top}(T_a) = \log 2$.
4. Soit μ une mesure ergodique d'entropie maximale. Justifiez que $\mu \perp \mathrm{Leb}$ si $a \neq 1/2$, i.e. μ et Leb sont étrangères. Qu'en est il si $a = 1/2$?

Problème 2. I. **Un recouvrement du cercle $\mathbb{T}$ associé à une rotation.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour $q \in \mathbb{N}$ on note $\|q\alpha\| = \min_{p\in\mathbb{Z}} |q\alpha - p|$. On pose $q_0 = 1$ et on définit par récurrence

$$q_n = \min\{q \in \mathbb{N}^*, \|q\alpha\| < \|q_{n-1}\alpha\|\}.$$

En particulier $\|q\alpha\| > \|q_n\alpha\|$ pour $q < q_n$. Dans la suite on note encore $\pm q_n\alpha \in \mathbb{T}$ les projetés sur le cercle de $\pm q_n\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $J_n =]-q_n\alpha, q_n\alpha[$ l'arc de cercle (ouvert) contenant 0 d'extrémités $\pm q_n\alpha$, ainsi que $J_n^- =]-q_n\alpha, 0]$ et $J_n^+ = [0, q_n\alpha[$ les sous arcs semi-ouverts de J_n d'extrémités $0, -q_n\alpha$ et $0, q_n\alpha$ respectivement. En particulier on a $J_n = J_n^+ \cup J_n^-$. Enfin on note f_α la rotation d'angle α sur le cercle.

(a) Montrer que $f_\alpha^k J_n^+$, $k = 0, \cdots, q_{n+1} - 1$, sont disjoint deux à deux. Puis de même avec J_n^- à la place de J_n^+.
(b) En déduire que tout point du cercle est contenue dans au plus deux arcs de cercle de la forme $f_\alpha^k J_n$, $k = 0, \cdots, q_{n+1} - 1$.
(c) Montrer que $f_\alpha^{q_{n+1}} J_n^+ \subset J_n$ et $f_\alpha^{q_{n+1}} J_n^- = f_\alpha^{q_{n+1}-q_n} J_n^+$.
(d) En déduire que $\bigcup_{k=0,\cdots,q_{n+1}-1} f_\alpha^k \overline{J_n} = \mathbb{T}$.

On admettra dans la suite que les éléments q_n, $n \in \mathbb{N}^*$, appartiennent à

$$\mathcal{N}(\alpha) = \left\{q \in \mathbb{N}^*,\ \exists p \in \mathbb{Z} \text{ with } p \wedge q = 1 \text{ and } |q\alpha - p| < \frac{1}{q}\right\}.$$

II. **Ergodicité des difféos C^2 de nombre de rotation irrationnel.**
Soit f un difféomorphisme du cercle de classe C^2 préservant l'orientation de nombre de rotation irrationnel α. Pour simplifier les notations, on écrira $|A|$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble borélien A de $\mathbb{T}$.

(a) En utilisant le théorème de Denjoy et la partie précédente, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in \mathbb{T}$ il existe un arc de cercle J contenant x de longueur inférieure à ϵ et un entier $q \in \mathcal{N}(\alpha)$ tels que :
— $\bigcup_{k=0,\cdots,q-1} f^k \overline{J} = \mathbb{T}$,

— tout point du cercle est contenue dans au plus deux arcs de cercle de la forme $f^k J$, $k = 0, \cdots, q-1$.

(b) On considère un ensemble borélien $\Lambda \subset \mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue positive satisfaisant $\Lambda = f(\Lambda)$. Soit x un point de densité de Lebesgue de Λ. En utilisant l'inégalité de Denjoy (propriété de distorsion bornée), montrer qu'il existe $C > 0$ indépendant de ϵ tel que pour tout $k \in \mathcal{N}(\alpha)$ on a

$$\frac{|f^k(J \setminus \Lambda)|}{|f^k J|} \leqslant C \frac{|J \setminus \Lambda|}{|J|}.$$

(c) Vérifier que

$$|\mathbb{T} \setminus \Lambda| \leqslant \sum_{k=0,\cdots,q-1} |f^k(J \setminus \Lambda)|.$$

(d) Conclure avec a), b), c) que $|\Lambda| = 1$.

III. **Un exemple sans mesure absolument continue.**

On considère l'application $G : [0,1] \to [0,1]$ affine par morceaux avec $G(0) = 0$, $G(1/3) = 2/3$ et $G(1) = 1$. On prolonge G sur $\mathbb{R}$ de sorte que $G(x+1) = G(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ telle que $G + b$ induit un homéomorphisme apériodique du cercle. Dans la suite on choisit un tel b et on note g l'homéomorphisme du cercle $\mathbb{T}$ associé. <u>*Indications :*</u> on pourra utiliser les deux faits suivants démontrés en TD :
— $F \mapsto \rho(F)$ est continue,
— $\rho(G + 1/3) = 1/2$.

(b) On suppose que g admet une mesure invariante μ absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue. Notons $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ sa densité, i.e. $\mu(A) = \int_A \phi(x)\, dx$ pour tout borélien A. Montrer que pour Lebesgue presque tout x on a

$$\phi(x) = \phi \circ g(x) \times g'(x).$$

(c) On note $K = \{\phi > 0\}$ et on considère pour $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \psi(x) =& \sin\left(a + \pi \frac{\log \phi(x)}{\log 2}\right) && \text{pour } x \in K, \\ \psi(x) =& 0 && \text{pour } x \notin K. \end{aligned}$$

Vérifier que $\psi \circ g(x) = -\psi(x)$ pour Lebesgue presque tout x.

(d) On admet que le résultat de la partie II s'applique à des dynamiques C^2 par morceaux. Montrer que ψ est constante Lebesgue presque partout. <u>*Indications :*</u> on pourra considérer $\Lambda = \{x \in \mathbb{T},\ \psi(x) \geqslant c\}$ pour $c \in \mathbb{R}$ pour la dynamique de $g \circ g$.

(e) Conclure que g n'admet pas de mesure invariante μ absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue.

FIN