Contrôle
Durée 3h

Documents autorisés : polycopié, notes de cours et PC, dictionnaires.

Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir une très bonne note...

Exercice 1.

Soit β le nombre d'or, i.e. $\beta > 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$. On pose

$$f : [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto \beta x \ (mod\ 1)$$

On considère la mesure $\mu = \int k\ dx$ de densité k par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ définie par

$$k(x) = \frac{1}{\beta^{-1} + \beta^{-3}} \text{ pour } x \in [0, \beta^{-1}],$$
$$k(x) = \frac{1}{\beta(\beta^{-1} + \beta^{-3})} \text{ pour } x \in]\beta^{-1}, 1].$$

1. Vérifier que μ est une mesure de proba f-invariante.
2. On note P la partition $P = \{[0, \beta^{-1}],]\beta^{-1}, 1]\}$. Justifiez que P est génératrice.
3. Montrer que le cardinal de $P^n = \bigvee_{0 \leqslant k < n} f^{-k}P$ vérifie pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

   $$\sharp P^{n+2} = \sharp P^{n+1} + \sharp P^n$$

   Indications : On pourra remarquer que pour $A \in P^n$, on a (aux extrémités près) soit $f^n(A) = (0,1)$, soit $f^n A = (0, \beta^{-1})$.
4. En déduire l'entropie de μ.
5. Bonus : Pour $x \in [0,1]$, on note $\Phi(x) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ avec $x_k = 0$ si $f^k x \in [0, \beta^{-1}]$ et $x_k = 1$ sinon. Identifier $\Phi_* \mu = \mu(\Phi^{-1} \cdot)$.

Exercice 2.

Soit (Y, σ) un sous-décalage, i.e. $Y \subset \{0, \cdots, K\}^{\mathbb{Z}}$ est fermé et vérifie $\sigma(Y) = Y$ pour le décalage σ. On rappelle que $\mathcal{L}_n(Y)$ désigne l'ensemble des mots de Y de longueur n.

1. Montrer que le sous-ensemble Y_n des suites $(x_k)_k$ de $\{0, \cdots, K\}^{\mathbb{Z}}$ telles que

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n-1} \in \mathcal{L}_n(Y)$$

   définit un sous-décalage de type fini.
2. Justifier succintement que $h_{top}(Y_n, \sigma) \geqslant h_{top}(Y, \sigma)$.
3. Montrer que $h_{top}(Y_n, \sigma) \xrightarrow{n \to +\infty} h_{top}(Y, \sigma)$.

Problème 1. *Théorème de Kopell.*
Le but de ce problème est de montrer le résultat suivant dû à Kopell.

Théorème.
Soit $f : [0, +\infty[\circlearrowleft$ un difféomorphisme de classe C^2 avec 0 pour seul point fixe. On considère $g : [0, +\infty[\circlearrowleft$ un difféomorphisme de classe C^1 satisfaisant $g \circ f = f \circ g$. Si g a un point fixe autre que 0, alors g est l'identité.

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où
$$\forall x \in]0, +\infty[, \ f(x) < x.$$
   On se place désormais dans ce cas et on suppose que $g(x_0) = x_0$ avec $x_0 \neq 0$.
2. Vérifier que $f^n(x_0)$ est un point fixe de g pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que
$$f^n(x_0) \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$
4. En déduire que $g'(0) = 1$.
5. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, il existe $C(x) > 0$ tel que
$$\forall y, z \in [f(x), x[, \quad \left| \frac{(f^n)'(y)}{(f^n)'(z)} \right| \leqslant C(x).$$
6. Montrer que pour tout $y > 0$ et pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{(g^k)'(y)}{(g^k)'(f^n y)} = \frac{(f^n)'(y)}{(f^n)'(g^k y)}$$
7. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $y \in [f(x_0), x_0[$ on a
$$|(g^k)'(y)| \leqslant C.$$
8. On suppose qu'il existe $z \in [f(x_0), x_0[$ tel que $g(z) \neq z$. Montrer que
$$\sup_{y \in [f(x_0), x_0]} |(g^k)'(y)| \xrightarrow{k \to +\infty} +\infty.$$
9. Conclure la preuve du Théorème de Kopell.

Problème 2. *Propriétés génériques des mesures ergodiques.*
On considère $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ muni du décalage σ. On rappelle que $\mathcal{M}(X, \sigma)$ désigne le compact (pour la topologie faible $*$) des mesures de proba boréliennes σ-invariantes. On note également $\mathcal{M}_e(X, \sigma)$ le sous-ensemble formé des mesures ergodiques (muni de la topologie induite de $\mathcal{M}(X, \sigma)$). Enfin, on appelle mesures périodiques les mesures de la forme $\frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \delta_{\sigma^k x}$ avec $\sigma^n(x) = x$.

1. Donner un exemple de mesure $\mu \in \mathcal{M}_e(X, \sigma)$ d'entropie non nulle et de support total (i.e. $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert U de X).
2. Donner un exemple de mesure $\mu \in \mathcal{M}(X, \sigma)$ (pas forcément ergodique) d'entropie nulle et de support total. <u>Indications :</u> on pourra construire une telle mesure à partir de mesures périodiques.

3. Montrer que toute mesure ergodique est limite de mesures périodiques. Indications : Pour $\mu \in \mathcal{M}_e(X,\sigma)$ on pourra considérer un point générique $x \in X$ pour μ, i.e. tel que $\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant k<n}\delta_{\sigma^k(x)} \xrightarrow{n\to\infty} \mu$.
4. On rappelle que $\limsup_{\nu\to\mu} h(\nu) \leqslant h(\mu)$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,\sigma)$. Montrer que pour tout $a>0$, l'ensemble $\{\mu \in \mathcal{M}_e(X,\sigma),\ h(\mu)<a\}$ contient un ouvert dense de $\mathcal{M}_e(X,\sigma)$.
5. Montrer que pour tout mot fini w, l'ensemble $\{\mu \in \mathcal{M}_e(X,\sigma),\ \mu([w])>0\}$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_e(X,\sigma)$, où $[w]$ est le cylindre associé à w, i.e. $[w]=\{(x_n)_n \in X,\ x_0\cdots x_{|w|-1}=w\}$.
6. On admet que $\mathcal{M}_e(X,\sigma)$ est un espace de Baire[1] (pour la topologie induite). Montrer que les mesures ergodiques d'entropie nulle et de support total sont denses dans $\mathcal{M}_e(X,\sigma)$.
7. Reprendre rapidement les questions 1., 2. et 3., lorsque X est un sous décalage de type fini transitif.

1. un espace de Baire est un espace topologique où toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense